

TESIS

Presentada el día 27 de diciembre de 2012 en la

Universidad de la República, UdelaR

para obtener el título de

MAGISTER EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

para

Ing. Juan Bruno BAZZANO GARCÍA

Instituto de Investigación : LPE - IMERL

Componentes universitarios :

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

Título de la tesis :

*Dinámica y Equilibrios de Nash de un Modelo Evolutivo de
Competición entre Firmas y Trabajadores Bajo Regulación Externa*

Comité de examinadores:

Dr. Elvio	ACCINELLI	Director de Tesis
Dr. Franco	ROBLEDO	Director Académico
Dr. Gonzalo	PERERA	Presidente del Comité
Dr. Luis	QUINTAS	Miembro del Comité
Dr. Juan	DUBRA	Miembro del Comité

*“...if the misery of the poor be caused not by the laws of nature,
but by our institutions, great is our sin...”*

Charles Darwin

Agradecimientos

Este trabajo es el resultado de una cantidad innumerable de aportes, técnicos y también personales, de distintas personas a lo largo del tiempo. Por lo tanto, el mérito de este trabajo es compartido. Uno querría agradecer a todas estas personas, pero esa es una tarea inabarcable. Sin embargo, a continuación me propongo hacer algunas menciones especiales, no sin antes aclarar que los eventuales errores u omisiones que puedan haber en esta tesis son completamente responsabilidad de quien escribe.

En primer lugar quiero agradecer a mi querida novia Josefina quien fue la principal impulsora de este trabajo. Ella disipó todas mis dudas respecto de embarcarme en esta tarea y luego me acompañó en todo momento. También agradezco profundamente a mi familia que siempre apoyó mi vocación por la ciencia y la docencia, vocación de la cual este trabajo es fruto.

En el ámbito académico, debo agradecer muy especialmente al Dr. Gonzalo Perera y al Dr. Franco Robledo por la confianza que depositaron en mí, el primero alentándome a formar parte del IMERL y el segundo impulsándome a encarar este trabajo de investigación. Agradezco a mi tutor, el Dr. Elvio Accinelli, por proponer el problema de tesis y por darme libertad de acción para resolverlo. Quisiera también expresar mi gratitud al MSc. Ing. Jorge Pérez por haberme ayudado generosamente a resolver varios problemas de implementación y también por leer y corregir la versión final del documento de tesis. Finalmente le agradezco a la MSc. Laura Aspirot, por haberme guiado en el tema de procesos estocásticos y además por haber revisado esta monografía.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	5
2. MARCO TEÓRICO	7
2.1. Teoría Económica	7
2.2. Teoría de Juegos Evolutivos	10
2.2.1. Juego en Forma Normal y Equilibrios de Nash	10
2.2.2. Equilibrios Evolutivamente Estables	12
2.2.3. Dinámicas de Selección Generales	13
3. COMPETICIÓN ENTRE FIRMAS Y TRABAJADORES	15
3.1. Modelo Sin Intervención Externa	17
3.1.1. Juego En Forma Normal	17
3.1.1.1. Definición	17
3.1.1.2. Cálculo de Equilibrios de Nash	20
3.1.1.3. Trampa de Pobreza	22
3.1.2. Proceso Estocástico del Replicador	23
3.1.3. Dinámica del Replicador	28
3.1.3.1. Deducción del Sistema de EDOs	28
3.1.3.2. Propiedades del Sistema de EDOs	31
3.1.3.3. Convergencia del Proceso Estocástico del Replicador	33
3.2. Modelo Con Intervención Externa	36
3.2.1. Juego En Forma Normal	37
3.2.1.1. Definición	37
3.2.1.2. Cálculo de Equilibrios de Nash	39
3.2.2. Proceso Estocástico del Replicador	40
3.2.3. Dinámica del Replicador	40
4. SIMULACIONES Y RESULTADOS NUMÉRICOS	45
4.1. Descripción de Métodos Numéricos	45
4.1.1. Método Runge-Kutta para EDOs	46
4.1.1.1. Definición y Propiedades	46
4.1.1.2. Esquema de Paso Adaptativo	49
4.1.1.3. Control de Estabilidad	51

4.1.1.4.	Algoritmo de Paso Adaptativo y Estable de Dormand-Prince	53
4.1.2.	Implementación	53
4.2.	Modelo Sin Intervención Externa	58
4.2.1.	Elección de Parámetros	58
4.2.2.	Simulaciones del Proceso Estocástico	59
4.2.2.1.	Proceso Convergente a la Trampa de Pobreza	60
4.2.2.2.	Proceso Convergente al Equilibrio Pareto Óptimo	63
4.2.3.	Soluciones de la Dinámica del Replicador	64
4.2.3.1.	Dinámica Convergente a la Trampa de Pobreza	64
4.2.3.2.	Dinámica Convergente al Equilibrio Pareto Óptimo	65
4.2.3.3.	Cuencas de Atracción de los Equilibrios Estables	65
4.3.	Modelo Con Intervención Externa	66
4.3.1.	Parámetros del Modelo Con Intervención Externa	66
4.3.2.	Solución de la Dinámica del Replicador	68
5.	CONCLUSIONES	73
5.1.	Conclusiones	73
5.2.	Trabajos a Futuro	74
A.	Monotonía y Positividad de la Función de Crecimiento $q(x)$	75
B.	Cálculo de Probabilidades de Cambios de Estrategias	77
C.	Lemas y Definiciones - Teorema 3.1.6	79
C.1.	Definición de Martingala	79
C.2.	Lemas sobre Supremos de Funciones Reales	80
C.3.	Cálculo de Cota para $E[\alpha(\mathbf{X}(t))]$	81
C.4.	Lema de Grönwall	83
D.	Cálculo de la Matriz Jacobiana de F	85
	Bibliografía	88
	Índice de figuras	89

Resumen

En el presente trabajo se estudia el concepto económico de trampas de pobreza en el contexto de un mercado de trabajo. Se introduce un regulador central que aplica una política de incentivos e impuestos con el fin de evitar que la economía caiga en una trampa de pobreza. A partir de esto, se verifica que es viable inducir agentes competitivos a comportarse de manera socialmente óptima.

Se estudian modelos de competición entre las poblaciones de trabajadores y firmas, basados en la teoría de juegos evolutivos. Se caracterizan las trampas de pobreza en términos de conceptos de teoría de juegos, y también se presentan modelos dinámicos de evolución, tanto estocásticos como determinísticos, basados en la dinámica del replicador. Se simulan evoluciones temporales tanto estocásticas como determinísticas de las poblaciones de firmas y trabajadores, de manera de verificar la validez del mecanismo de control del regulador central.

Palabras Clave:

Trampa de Pobreza, Regulador Central, ESS, Equilibrio de Nash, Dinámica del Replicador, Dinámica Estocástica.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La pobreza es un fenómeno económico sumamente complejo, el cual se origina a partir de una multiplicidad de factores. Este trabajo se centra en la pobreza como resultado de una respuesta racional de los agentes económicos a una coyuntura desfavorable. Es decir, las acciones del resto de la economía determinan que el agente económico racional y maximizador de su beneficio deba optar por una actividad económica ineficiente de manera de limitar sus pérdidas. Este enfoque se puede enmarcar y tratar formalmente mediante la teoría de juegos. En particular, si nos interesa conocer la evolución temporal de las acciones de los agentes económicos debemos recurrir a la teoría de juegos evolutivos. El enfoque presentado en las líneas anteriores es el que se utiliza a lo largo de esta tesis.

Los trabajos de Accinelli et al. ([Accinelli et al., 2009], [Accinelli et al., 2010] y [Accinelli et al., 2011]) sientan las bases de los modelos que desarrollamos y analizamos en esta tesis. En ellos se presenta un juego no cooperativo entre firmas y trabajadores, en dicho juego tanto las firmas como los trabajadores pueden elegir ser innovadores y tecnificados o actuar de manera no innovadora y con tecnología obsoleta. La tecnificación se asocia a una economía de mayor desempeño, mientras que la falta de innovación corresponde a una economía estancada con dificultades para competir con otras más tecnificadas. En los trabajos citados, se identifica como una trampa de pobreza a la situación en la cual las firmas y trabajadores optan por no innovar. El concepto de trampa de pobreza se traduce, en el marco de la teoría de juegos, a un equilibrio de Nash, pareto-ineficiente y evolutivamente estable del juego entre firmas y trabajadores. En términos simplificados, lo anterior significa que en la trampa de pobreza los agentes no tienen incentivo a cambiar su comportamiento. Además, debe existir algún otro equilibrio en el cual a ningún agente le irá peor que en la trampa de pobreza e incluso algunos se beneficiarán. Por último, si algunos agentes intentan apartarse de la trampa de pobreza esos individuos obtendrán peores resultados que aquellos que se mantienen en la trampa de pobreza. Esas tres propiedades caracterizan las trampas de pobreza en el contexto de la teoría de juegos evolutivos, por detalles de estos conceptos de teoría de juegos referimos al lector al libro [Weibull, 1997].

El aporte fundamental de esta tesis es la introducción de un mecanismo regulador que impide que las firmas y trabajadores evolucionen hacia la trampa de pobreza. Dicho esquema se basa en la existencia de un regulador central, el cual puede fijar políticas de incentivos y políticas fiscales. El mecanismo propuesto consiste en una primera etapa de subsidios a los

individuos innovadores de manera de alentar a los no innovadores a cambiar de estrategia. Se busca que los trabajadores comiencen a formarse para poder realizar trabajos innovadores con tecnología de punta, y las firmas inviertan en tecnología y premios para los trabajadores formados. Una vez que se genera una “masa crítica” de firmas innovadoras y trabajadores formados que asegura que la economía no va a retroceder a la trampa de pobreza, el regulador central aplica una política fiscal de impuestos. Se busca recaudar capital suficiente como para cancelar la deuda que se generó durante la etapa de subsidios. Una vez cumplido el objetivo de recaudación, se cancela la deuda y se retira definitivamente la intervención del regulador central. La economía se mantendrá por sí misma en una situación de innovación y tecnificación, eficiente del punto de vista de los ingresos de los agentes económicos y estable frente a perturbaciones que intenten apartarla de ese equilibrio.

El presente documento de tesis consiste de cinco capítulos principales, encabezados por este primer capítulo introductorio. En segundo lugar se encuentra el capítulo que contiene el marco teórico de los elementos utilizados para obtener los modelos matemáticos de la interacción de firmas y trabajadores. Se describen en dicho capítulo trabajos económicos anteriores que analizan las trampas de pobreza mediante otras herramientas dinámicas, distintas a la teoría de juegos evolutivos. También presentamos en el marco teórico definiciones y proposiciones de teoría de juegos necesarias para enunciar los modelos de competición entre firmas y trabajadores, así como las notaciones que se utilizan a lo largo de la tesis. En tercer lugar se encuentra el capítulo de modelos propiamente, en el mismo se presenta el modelo de competición sin intervención externa y a continuación el modelo con intervención externa. Se analizan los juegos en forma normal, los procesos estocásticos evolutivos de las poblaciones de firmas y trabajadores, y las dinámicas determinísticas que aproximan a los procesos estocásticos para poblaciones infinitas. El capítulo número cuatro presenta los resultados numéricos obtenidos de los modelos del capítulo tres. En primer lugar se describen los procedimientos y métodos numéricos utilizados para obtener dichos resultados. Luego se simulan evoluciones de las poblaciones tanto estocásticas como determinísticas para una variedad de situaciones, sin regulación externa así como con regulación externa. Finalmente, en el capítulo cinco se presentan las conclusiones de este trabajo de investigación y también algunas líneas de investigación a futuro de interés para el problema analizado.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En el presente capítulo presentaremos una breve reseña de los elementos teóricos que fundamentan los modelos desarrollados en esta tesis. Dividiremos el capítulo en dos secciones, siendo la primera sobre Economía y la segunda sobre Teoría de Juegos Evolutivos.

En la primer sección definiremos algunos conceptos económicos que son usados a lo largo de este trabajo y haremos un recuento de los trabajos que han avanzado dichos conceptos. Además, mencionaremos la metodología utilizada para definir el modelo de la Sección 3.2.

En cuanto a la segunda sección, el objetivo principal es definir la notación matemática que será utilizada en este trabajo. También daremos las definiciones y resultados básicos de la teoría de juegos evolutivos a los cuales haremos referencia luego en los modelos, suponiendo que el lector ha leído el presente capítulo o que él ya está familiarizado con esta rama de la Matemática.

2.1. Teoría Económica

La presente sección está basada en parte en trabajos de E. Accinelli y E. Sanchez Carrera. En primer lugar se expondrá el concepto económico de Trampa de Pobreza y luego se mencionarán algunos trabajos recientes en los cuales se analizó dicho concepto.

En el trabajo [Azariadis and Stachurski, 2005] los autores dan una definición de *Trampa de Pobreza*, la cual es un excelente punto de partida para entender el fenómeno que estudiamos en esta tesis.

Definición 2.1.1 (Trampa de Pobreza) *Una trampa de pobreza es cualquier mecanismo que se refuerza a sí mismo y que perdura la pobreza.*

El concepto de trampa de pobreza se alinea con la concepción de que en algunas situaciones la pobreza puede estar más allá del control de los agentes económicos. Esto se contrapone a la idea arraigada en la cultura popular de que una persona puede ser pobre por falta de iniciativa o por falta de esfuerzo para escapar a su situación. Además de dar la definición anterior, el autor menciona la frase “círculos viciosos de pobreza” como una que aparece frecuentemente en los problemas de desarrollo económico y también como merecedora de análisis a pesar de

su aparente obviedad. La idea de círculo vicioso de pobreza está evidentemente conectado a la característica de auto-refuerzo de las trampas de pobreza.

En el trabajo [Accinelli et al., 2009] los autores presentan un primer modelo de competición entre firmas y trabajadores en el cual se identifica una trampa de pobreza para el conjunto de las firmas y los trabajadores. La misma consiste en que partiendo de una economía predominantemente no innovadora, los agentes innovadores no pueden sostener su estrategia ya que los retornos que perciben los desalientan. La característica principal de este modelo es que se halla una trampa de pobreza que es un equilibrio de Nash, estable del punto de vista evolutivo y además pareto-ineficiente. Este modelo fue refinado por los autores en los trabajos [Accinelli et al., 2010] y [Accinelli et al., 2011]. En éstos últimos se agregaron parámetros económicos relevantes y se plantea como trabajo a futuro el análisis del accionar de un regulador externo. Es en esa línea de trabajo que se coloca la presente tesis.

Las trampas de pobreza han sido identificadas en varios contextos distintos y también en diferentes escalas. Justamente, un concepto derivado de las trampas de pobreza y basado en su existencia en distintas escalas, es el de Trampas de Pobreza Fractales. Dicha idea fue introducida en el trabajo [Barrett and Swallow, 2006]. En el mismo los autores presentan una teoría informal en la cual se proponen múltiples equilibrios dinámicos simultáneos en distintas escalas. También afirman que en ningún nivel se opera en un equilibrio de nivel eficiente o alto, por el contrario en todas las escalas se opera en equilibrios de nivel bajo o ineficientes. El análisis dinámico está basado en los Modelos de Crecimiento Económico. A continuación haremos una breve mención sobre estos esquemas dinámicos.

En los modelos de crecimiento se estudia alguna variable económica (x) asociada al bienestar, como por ejemplo ingreso, gasto o capital entre otros. Se estudia la evolución temporal de la variable económica x_t , asumiendo un modelo de tiempo discreto ($t \in \mathbb{N}^+$). En particular, se plantea una relación funcional entre el valor de la variable en el tiempo actual (x_t) y el valor de la variable en el próximo período (x_{t+1}). La función $F(\cdot)$ que vincula los valores de la variable en los períodos consecutivos se llama Función de Crecimiento. A partir de lo anterior se obtiene la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$x_{k+1} = F(x_k) \quad (2.1)$$

Dicha ecuación tendrá como puntos estacionarios a aquellos que verifiquen:

$$\alpha = F(\alpha) \quad (2.2)$$

La estabilidad, o inestabilidad, dinámica de dichos puntos estacionarios dependerá de las propiedades de la función $F(\cdot)$. Por estabilidad nos referimos a que perturbaciones suficientemente pequeñas del punto α se mantienen para $t \rightarrow \infty$ a una distancia acotada de α . Por una definición formal de estabilidad ver por ejemplo el Capítulo 9 del libro [Hirsch and Smale, 1974].

En términos globales, si la función $F(\cdot)$ es contractiva en todo un espacio de Banach (S), el teorema de punto fijo en ese espacio asegura la existencia y unicidad de un punto fijo $\alpha \in S$. También garantiza que para cualquier $x_0 \in S$ la ecuación 2.1 define una sucesión convergente a dicho punto fijo. En términos del modelo de crecimiento, en estas hipótesis existirá un único punto estacionario α el cual será globalmente estable.

También se puede tener estabilidad local de un punto fijo si se cumple la hipótesis de contractividad en un entorno de dicho punto fijo. En este caso la convergencia de la sucesión generado por la ecuación 2.1 se cumplirá para los $x_0 \in B(\alpha, r)$ siendo $B(\alpha, r)$ una bola de centro α y radio $r > 0$ tal que $F(\cdot)$ es contractiva en esa bola. El resultado anterior se puede encontrar, con hipótesis similares, en el Teorema 6.5.1 del libro [Dahlquist et al., 2003].

La condición de contractividad en $A \in \mathbb{R}$ para una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^1 es equivalente a que se cumpla $|f'(x)| \leq m < 1$ para todo $x \in A \subset \mathbb{R}$. Basado en lo anterior, el análisis de la estabilidad de un punto fijo se puede realizar gráficamente. Basta con estudiar la gráfica de $F(x)$, ya que los puntos donde ésta corta la recta: $y = x$ serán los puntos fijos. Mientras que éstos puntos serán estables si la pendiente de F en dichos puntos fijos se encuentra entre -1 y 1 .

En la Figura 2.1 se muestra un ejemplo de función de crecimiento que tiene dos puntos fijos estables y uno inestable. El menor de los estables (x_P) corresponde a la trampa de pobreza mientras que el mayor (x_E) corresponde a un equilibrio eficiente. Entre ellos se encuentra el equilibrio inestable (x_C) el cual verifica que si $x_0 > x_C$ entonces la sucesión $\{x_k\}$ converge a x_E y por el contrario, si $x_0 < x_C$ la sucesión converge a x_P . En la figura se muestran en azul dos sucesiones convergentes a la Trampa de Pobreza y en rojo dos sucesiones convergentes al equilibrio eficiente.

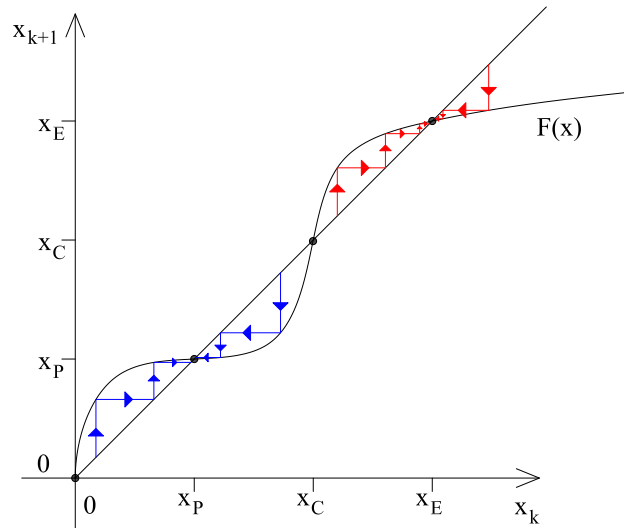


Figura 2.1 – Esquema de la Dinámica Resultante de un Modelo de Crecimiento

En la Sección 3.2 del Capítulo 3 de la presente tesis se plantea una forma de intervención en la dinámica de la competencia. Se coloca un regulador central en la economía, el cual define reglas de incentivos e impuestos de manera que tanto trabajadores como firmas evolucionen hacia un equilibrio pareto-eficiente. En este caso el regulador actúa de forma benevolente del punto de vista de los agentes ya que mediante su intervención se logra hacer coincidir el interés

individual y social de las firmas y trabajadores. Mientras que del punto de vista del regulador central, el mismo cumple con su objetivo primordial de llevar a la economía a un estado desarrollado.

2.2. Teoría de Juegos Evolutivos

2.2.1. Juego en Forma Normal y Equilibrios de Nash

En esta sección haremos una síntesis de los elementos de la Teoría de Juegos Evolutivos que son utilizados a lo largo de esta tesis. Servirá para que un lector no especializado tenga una primer aproximación a las ideas manejadas en este trabajo, así como para introducir la notación que será usada en el Capítulo 3, en el cual se presentan los distintos modelos de competición entre firmas y trabajadores.

En lo que sigue y también en el resto de la tesis, se utiliza la notación presentada en el libro [Weibull, 1997]. El mismo es una referencia excelente para aquellos que quieran explorar la Teoría de Juegos Evolutivos.

Nos centraremos en juegos multi-jugador y en las dinámicas de selección asociadas a dichos juegos. Comenzaremos definiendo los juegos no cooperativos en forma normal entre varios jugadores.

Definamos el *Conjunto de Jugadores* $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ siendo n un entero positivo. Cada uno de los jugadores tendrá un conjunto finito de estrategias puras, las cuales identificaremos mediante enteros positivos. Por lo tanto, el *Conjunto de Estrategias Puras del Jugador i* será $S_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$ teniendo los jugadores como mínimo dos estrategias cada uno. Las elecciones de estrategias de todos los jugadores se pueden resumir en un vector ordenado de estrategias, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ con $s_i \in S_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. A partir de lo anterior, definiremos el *Conjunto de Estrategias Puras del Juego* como $\mathcal{S} = \times_i S_i$ el producto cartesiano de los conjuntos de estrategias puras de los jugadores, con lo cual $s \in \mathcal{S}$.

Cada jugador tendrá asociada una función de retornos para estrategias puras. Dicha función da la preferencia de un jugador i por su estrategia pura s_i dado que el resto de los jugadores eligen otras estrategias puras. Con lo cual, la *Función de Retornos para Estrategias Puras del Jugador i* será $\pi_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Estas funciones se agrupan para definir la *Función de Retornos para Estrategias Puras del Juego* $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que dado un vector de estrategias puras del juego $s \in \mathcal{S}$ devuelve $\pi(s) = (\pi_1(s), \pi_2(s), \dots, \pi_n(s))$.

A partir de las definiciones anteriores, un *Juego en Forma Normal* (G) queda definido por la terna $G = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \pi)$.

Definiremos a continuación las estrategias mixtas de los jugadores. Para el jugador i , la *Estrategia Mixta del Jugador i* es una distribución de probabilidades en el conjunto de estrategias puras S_i . Resumiremos esa distribución de probabilidades en un vector $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ tal que $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_i})$. Con lo cual $x_{ik} \in [0, 1]$ será la probabilidad que el jugador i elija su estrategia pura k .

Definiremos (Δ_i) el *Simplex de Estrategias Mixtas del Jugador i* como el conjunto de todas sus posibles estrategias mixtas.

$$\Delta_i = \{x_i \in \mathbb{R}^{m_i} : \sum_{k=1}^{m_i} x_{ik} = 1, x_{ik} \geq 0 \forall k\} \quad (2.3)$$

Dada la definición de estrategias mixtas, las estrategias puras se pueden expresar como los vértices de Δ_i , o sea que se le asigna probabilidad 1 a una estrategia pura y cero al resto. Dichos vectores se representarán como $e_i^1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_i^2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, etc. En otras palabras, los vectores e_i^k con $k = 1, \dots, m_i$ son la base canónica de \mathbb{R}^{m_i} . Y eso permite escribir cualquier vector de estrategias mixtas del jugador i como:

$$x_i = \sum_{k=1}^{m_i} x_{ik} e_i^k \quad (2.4)$$

A continuación agruparemos el conjunto de las estrategias mixtas de todos los jugadores en un vector (x) que llamaremos *Perfil de Estrategias Mixtas del Juego*. Siendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vector del espacio de estrategias mixtas del juego $\Theta = \times_i \Delta_i$.

Resultará útil usar la siguiente notación, donde $z = (x_i, y_{-i}) \in \Theta$ se define como $z_i = x_i$ y $z_j = y_j$ para todo $j \neq i$. Este vector representa el perfil de estrategias mixtas donde el jugador i utiliza la estrategia mixta x_i y el resto de los jugadores utilizan $y \in \Theta$.

A partir de lo anterior, podemos ahora definir los retornos esperados de los jugadores. En esta definición se asume que los sucesos de elección de estrategias de los distintos jugadores son independientes. Bajo esa hipótesis dado un perfil de estrategias puras del juego $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathcal{S}$, la probabilidad que ese conjunto de estrategias puras sea el utilizado por los jugadores dado un perfil de estrategias mixtas $x \in \Theta$ es igual a $P(s) = \prod_{i=1}^n x_{is_i}$. El *Retorno Esperado del Jugador i* para el perfil de estrategias mixtas $x \in \Theta$ resulta:

$$u_i(x) = \sum_{s \in \mathcal{S}} P(s) \pi_i(s) \quad (2.5)$$

Podemos resumir el conjunto de retornos esperados de los jugadores en la función que llamaremos la *Función de Retornos Esperados del Juego*. Esta función se define como $u : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$.

A continuación definiremos, para el perfil de estrategias $y \in \Theta$, el concepto de mejor respuesta en estrategias puras del jugador i . Una mejor respuesta del jugador i al perfil de estrategias y es una estrategia para la cual el jugador i no encuentra otra que le de mejor resultado. A partir de esto, se puede definir para el jugador i la *Correspondencia de Mejores Respuestas en Estrategias Puras* como $\beta_i : \Theta \rightarrow S_i$ tal que:

$$\beta_i(y) = \{h \in S_i : u_i(e_i^h, y_{-i}) \geq u_i(e_i^k, y_{-i}) \forall k \in S_i\} \quad (2.6)$$

Y de manera análoga se puede definir la *Correspondencia de Mejores Respuestas en Estrategias Mixtas* como $\tilde{\beta} : \Theta \rightarrow \Delta_i$ tal que:

$$\tilde{\beta}_i(y) = \{x_i \in \Delta_i : u_i(x_i, y_{-i}) \geq u_i(z_i, y_{-i}) \forall z_i \in \Delta_i\} \quad (2.7)$$

Será útil agrupar las mejores respuestas, tanto en estrategias puras como en estrategias mixtas, a nivel de juego. Por lo tanto definiremos dichas correspondencias como $\beta(y) = \times_i \beta_i(y) \subset \mathcal{S}$ y $\tilde{\beta}(y) = \times_i \tilde{\beta}_i(y) \subset \Theta$ respectivamente.

A continuación llegamos al concepto central de la Teoría de Juegos No Cooperativos, siendo este el de *Equilibrio de Nash*.

Definición 2.2.1 (Equilibrio de Nash) *El perfil de estrategias mixtas $x \in \Theta$ es un equilibrio de Nash sii $x \in \tilde{\beta}(x)$*

En palabras, se tiene un Equilibrio de Nash si cada uno de los jugadores está utilizando una de sus mejores respuestas a las estrategias del resto de los jugadores. En [Nash, 1951] el autor demuestra que para cualquier juego finito G el conjunto de equilibrios de Nash es no vacío.

El equilibrio de Nash será estricto si las desigualdades en las definiciones de mejores respuestas mixtas se verifican de manera estricta. Es decir, si cada uno de los jugadores elige un perfil de estrategias que tiene un retorno estrictamente mayor que sus otras posibles elecciones.

2.2.2. Equilibrios Evolutivamente Estables

En los párrafos siguientes definiremos los equilibrios evolutivamente estables, el concepto se origina en el trabajo [Maynard Smith and Price, 1973]. John Maynard Smith fue un ingeniero aeronáutico Británico que comenzó sus trabajos en evolución de especies estudiando la evolución del vuelo. Se recomienda al lector interesado ver una presentación realizada por el propio Maynard Smith sobre sus primeros pasos en esta área, la misma puede encontrarse en el sitio web indicado en la referencia [Maynard Smith, 1997].

La idea de un equilibrio evolutivamente estable surgió en juegos simétricos de dos jugadores. Es decir, en juegos de dos jugadores que tienen idénticos conjuntos de estrategias puras. Informalmente, dada $x \in \Theta$ la cual llamaremos “estrategia residente”, esta será evolutivamente estable si al modificarla con una pequeña mutación arbitraria $y \in \Theta$ obtenemos un perfil post-mutación $w = x(1 - \epsilon) + \epsilon y$, tal que el perfil mutante obtiene un peor resultado que el perfil residente al enfrentar el perfil post-mutación. Por supuesto, la medida de que tan bueno o malo es el resultado de un perfil esta dada por su retorno esperado.

Esta misma idea se puede extender al caso de un juego con varios jugadores y cada uno con distintos conjuntos de estrategias puras.

Definición 2.2.2 (Equilibrio Evolutivamente Estable - ESS) *El perfil de estrategias mixtas $x \in \Theta$ es un equilibrio evolutivamente estable sii para cada $y \neq x \in \Theta$ existe algún $\epsilon_y \in (0, 1)$ tal que se verifica $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_y]$ y con: $w = x(1 - \epsilon) + \epsilon y$,*

$$u_i(x_i, w_{-i}) > u_i(y_i, w_{-i}) \quad \text{para algún } i \in \mathcal{I}$$

El parámetro ϵ_y se llama barrera de invasión de la mutación y , ya que indica a partir de cuándo el tamaño de la mutación no es lo suficientemente grande como para desplazar a la estrategia residente.

Observar que no se pide que la desigualdad se verifique para todo $i \in \mathcal{I}$, sino que solamente es para algún $i \in \mathcal{I}$. De todas formas, para esta relativamente débil definición se verifica la siguiente proposición:

Proposición 2.2.3 *El perfil de estrategias mixtas $x \in \Theta$ es ESS si y solo si x es un equilibrio de Nash estricto.*

Esto hace que este tipo de definición de equilibrio ESS descarte todos los equilibrios de Nash excepto los estrictos.

2.2.3. Dinámicas de Selección Generales

Por último, haremos algunas definiciones relevantes a la tesis en el área de Dinámicas de Selección Generales.

Asumiremos que tenemos poblaciones infinitas de individuos que durante su vida están programados a elegir una estrategia determinada. Estos individuos se agrupan en primer lugar por clase de jugador, lo cual significa que cada clase de jugador ($i \in \mathcal{I}$) tendrá una población dada de individuos. Dentro de cada una de esas clases de jugador, los individuos se dividen en sub-poblaciones ($h \in S_i$) asociadas a las estrategias puras de la clase de jugador. Con lo cual el vector que describe el *Estado de Población* en un instante de tiempo t será $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Theta$.

A partir de las poblaciones anteriores, se puede plantear que la evolución de las mismas estará determinada por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de primer orden. Llamaremos *Dinámica de Selección* a uno de estos sistemas de EDOs. Para cada clase de jugador $i \in \mathcal{I}$ y cada sub-población $h \in S_i$ tendremos:

$$\dot{x}_{ih}(t) = x_{ih}(t)q_{ih}(x) \quad \forall i \in \mathcal{I}, h \in S_i \quad (2.8)$$

Las funciones $q_{ih} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ se llaman *Funciones de Crecimiento* ya que dan la tasa de crecimiento per cápita de la sub-población h de la clase de jugador i : $q_{ih}(x) = \dot{x}_{ih}(t)/x_{ih}(t)$. Estas funciones deberán ser Lipschitz en un abierto $X \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\Theta \subset X$, con $m = \sum_i m_i$. Las funciones de crecimiento se agrupan por clase de jugador y también a nivel de población, siendo estas $q_i(x) = (q_{i1}(x), q_{i2}(x), \dots, q_{im_i}(x))$ con $i \in \mathcal{I}$ y $q(x) = (q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x))$ respectivamente.

Definiremos en lo que sigue algunas propiedades de las funciones de crecimiento, las cuales serán utilizadas en el Capítulo 3. Estas propiedades son las de *Regularidad*, *Monotonía en los Retornos* y *Positividad en los Retornos*.

Definición 2.2.4 *Una función de crecimiento $q(x)$ es regular sii $q_i(x) \cdot x_i = 0$ para todo $x \in \Theta$, $i \in \mathcal{I}$.*

Esta propiedad garantiza que el tamaño de las poblaciones de clases de jugadores se mantengan constantes, alcanza con ver que la regularidad implica: $\sum_h \dot{x}_{ih} = 0$.

A continuación damos la definición de monotonía en los retornos para una función de crecimiento.

Definición 2.2.5 *Una función de crecimiento $q(x)$ es monótona en los retornos sii se cumple la siguiente equivalencia para todo $i \in \mathcal{I}$, $x \in \Theta$ y $h, k \in S_i$.*

$$u_i(e_i^h, x_{-i}) > u_i(e_i^k, x_{-i}) \Leftrightarrow q_{ih}(x) > q_{ik}(x)$$

Esta propiedad implica que si, para la clase de jugador i , la estrategia $h \in S_i$ tiene mayor retorno esperado que otra estrategia $k \in S_i$, entonces la sub-población correspondiente a h debe tener una tasa de crecimiento mayor que la sub-población correspondiente a k .

Finalmente, daremos la definición de positividad en los retornos de una función de crecimiento.

Definición 2.2.6 Una función de crecimiento $q(x)$ es positiva en los retornos sii para todo $i \in \mathcal{I}$, $x \in \Theta$ y $h \in S_i$ se cumple:

$$\text{sgn}[q_{ih}(x)] = \text{sgn}[u_i(e_i^h, x_{-i}) - u_i(x)]$$

Siendo $\text{sgn}(y)$ la función signo de $y \in \mathbb{R}$. Esta última propiedad implica que si la clase de jugador i obtiene un mayor retorno esperado utilizando la estrategia h que utilizando el perfil de población actual (x) , entonces la función de crecimiento de la sub-población h deberá ser positiva. Con lo cual la sub-población h crecerá en el tiempo. Observar que el retorno esperado del jugador i dado el perfil actual x es un promedio de los retornos esperados para cada una de sus estrategias puras, o sea $u_i(x) = \sum_k x_{ik} u_i(e_i^k, x_{-i})$. Con lo cual otra manera de expresar esta propiedad es que las estrategias puras que tienen retornos por encima (debajo) de la media de las estrategias puras deben tener tasas positivas (negativas).

En general se pueden tener funciones de crecimiento que sean positivas pero no necesariamente monotónicas en los retornos. Sin embargo en dinámicas de selección con dos estrategias por clase de jugador ($m_i = 2$ con $i \in \mathcal{I}$) la condición de monotonía es equivalente a la de positividad. Se tiene por lo tanto la siguiente proposición.

Proposición 2.2.7 En una dinámica con dos estrategias por jugador ($m_i = 2$ con $i \in \mathcal{I}$), dada una función de crecimiento regular $q(x)$, esta será monotónica en los retornos si y solo si es positiva en los retornos.

Este resultado se enuncia sin demostración formal en [Weibull, 1997] y dado que será utilizada en la Sección 3, se consideró apropiado incluir una demostración formal en esta tesis. La prueba de dicha proposición se encuentra en el Apéndice A.

Capítulo 3

COMPETICIÓN ENTRE FIRMAS Y TRABAJADORES

A lo largo del presente capítulo se presentan modelos basados en la de teoría de juegos que buscan reproducir el comportamiento del mercado de trabajo formado por firmas y trabajadores, así como las dinámicas asociadas a los mismos. Los modelos se enmarcan más precisamente en la teoría de juegos evolutivos, la misma fue brevemente descrita en la Sección 2.2 y referimos al lector no especializado a esa sección por más detalles. Los modelos que se presentan en este capítulo están basados en ideas de Accinelli et. al, expuestas en los trabajos [Accinelli et al., 2011] y [Accinelli et al., 2010]. En la presente tesis se modificaron algunos aspectos de los mismos, y se extendieron esos modelos al incluir la actividad de un regulador central en la economía. Asumiremos que el regulador central es exógeno al juego de las firmas y trabajadores y que éste busca obtener una economía desarrollada. También se analiza el proceso estocástico de base (dinámica para poblaciones finitas) y la convergencia del proceso estocástico a la dinámica determinística (dinámica para poblaciones infinitas). El objetivo de ese análisis es evaluar si es adecuado trabajar con el modelo determinístico en vez del estocástico.

En la etapa inicial del trabajo realizado para esta tesis, se buscó construir modelos que se basaran en la redistribución de impuestos cobrados en la economía para escapar de las trampas de pobreza. Se intentó modificar los retornos de los jugadores para que dependieran de la proporción de impuestos recolectados, otorgando incentivos a ciertos jugadores a partir del impuesto recolectado. Esta idea tuvo un éxito parcial, ya que se obtuvo un juego con los Equilibrios de Nash esperados, pero dada la forma del juego, no se podía obtener una dinámica del replicador que tuviera los Equilibrios de Nash como puntos estacionarios.

En el presente trabajo se logró plantear modelos de juegos que tuvieran dinámicas asociadas que reprodujeran el llamado efecto de masa. Es decir, que se tienen poblaciones de agentes que llegan a jugar estrategias que componen equilibrios de Nash, no mediante racionalidad perfecta, sino por repetición del juego y seleccionando estrategias en base, en el caso de la presente tesis, a la imitación de agentes exitosos. Ya en su disertación de doctorado [Nash, 1950], John Nash exponía este concepto, pero el mismo comenzó a tomar relevancia en el trabajo de Maynard-Smith [Maynard Smith and Price, 1973]. En [Kuhn et al., 1994] se presenta

un recuento histórico muy completo de la evolución de estas ideas.

Además, se halló también una forma de evitar que economías evolucionen hacia trampas de pobreza. No por medio de redistribución de impuestos, sino por el camino de incentivos en forma de subsidios y una posterior política fiscal que recupere la inversión realizada en la etapa de subsidios. Para ello se construyeron modelos de competencia entre firmas y trabajadores en los cuales se dotó al regulador externo de parámetros de control de manera que pueda encausar la economía lejos de la trampa de pobreza.

Respecto de las trampas de pobreza, se buscaron juegos en los cuales existan estrategias que sean Equilibrios de Nash, y que también fueran pareto sub-óptimas respecto de las ganancias de los jugadores. O lo que es lo mismo, que puedan haber otras estrategias distintas que la trampa de pobreza, las cuales sean Equilibrios de Nash y para las cuales al menos un jugador (trabajador o firma) gane más que en la trampa de pobreza. Dichas estrategias también deben tener la característica de ser estrategias evolutivamente estables (*ESS*). Para tener este comportamiento en los modelos se incorporaron un número de reglas llamadas Complementaridades Estratégicas, las cuales imponen condiciones en los parámetros del modelo. Las mismas serán presentadas en detalle en las secciones siguientes.

En cuanto a los efectos de los subsidios e impuestos, se busca que los mismos no eliminen las trampas de pobreza, pero sí que tengan un efecto en cuanto a la estabilidad de las trampas de pobreza. En particular, se tomaron impuestos o subsidios tales que afecten el alcance de las trampas de pobreza, reduciéndolo o aumentándolo.

En las secciones siguientes se presentan dos modelos:

El primero, llamado “**Modelo Sin Intervención Externa**”, corresponde al juego que se lleva a cabo entre una empresa y un trabajador en la hipótesis que el juego depende exclusivamente de la interacción de estos dos jugadores. Se plantean las definiciones del juego, por ejemplo cantidad y clase de jugadores, sus estrategias, las ganancias netas de cada uno de los jugadores al usar sus respectivas estrategias, etc. A su vez se presentarán definiciones que hacen a la dinámica, como ser tipo de dinámica, tasas de revisión de agentes, probabilidades de transición, etc. Llegando a formular el sistema de EDOs que gobiernan la dinámica de las poblaciones. Y también para el primer modelo, plantearemos la forma del proceso estocástico de base para la dinámica determinística. Daremos una expresión bien definida del mismo a efectos de poder simular realizaciones del proceso para poblaciones de firmas y trabajadores finitas, así como estudiar la convergencia del proceso estocástico a la solución de la EDO.

El segundo modelo se llama “**Modelo Con Intervención Externa**”, y el juego se desarrolla entre una empresa y un trabajador, pero sus ganancias también dependen de parámetros controlados por un agente externo a la economía. Los parámetros de control son incentivos o impuestos, y son elegidos por el agente externo (por ejemplo un regulador central) con el fin de evitar que la economía se estanque en una trampa de pobreza. En este segundo modelo se describirá la estrategia a seguir por el regulador central a fin de lograr llevar una economía en situación de no innovación o pobreza a una situación de riqueza o innovación. Al igual que en el Modelo Sin Intervención Externa, definiremos los componentes de la dinámica, que son esencialmente los mismos que enumeramos para el primer modelo. Excepto que, para cada elección de parámetros de control por parte del regulador central, tendremos una dinámica particular.

3.1. Modelo Sin Intervención Externa

3.1.1. Juego En Forma Normal

3.1.1.1. Definición

Se define un juego en forma normal, compuesto por $G = \{\mathcal{I}, \mathcal{S}, \pi\}$. Siendo, como es usual, \mathcal{I} el conjunto de jugadores, \mathcal{S} el conjunto de estrategias puras de los jugadores y π los retornos para los jugadores dadas las estrategias puras.

Los jugadores son trabajadores y firmas, y los representaremos como $\mathcal{I} = \{W, F\}$ (del inglés: *Workers* y *Firms*). Y el juego consiste de una firma y un trabajador que interactúan en el mercado de trabajo y deberán decidir que perfil les es mas favorable del punto de vista de maximizar sus ingresos.

Las estrategias de los trabajadores serán las de formarse o no formarse. La estrategia de formarse corresponde a que los trabajadores inviertan en educación especializada para así tener la opción de poder acceder a trabajos calificados en firmas innovadoras. Mientras no formarse implica no hacer esa inversión y renunciar a la opción de acceder a trabajos calificados. Se debe considerar la formación de un trabajador en el contexto de formación continua, de esta manera es posible que un trabajador formado pueda dejar de serlo simplemente abandonando la cultura de formación continua. Estas estrategias las resumiremos como $S_W = \{S, NS\}$ (del inglés: *Skilled Worker* y *Unskilled Worker*).

De la misma manera las firmas tendrán dos estrategias, éstas podrán innovar o no innovar. En la primera estrategia la firma invierte en tecnología y se beneficia de trabajadores formados. Mientras que en la segunda estrategia la firma no invierte en tecnología y tampoco obtiene mayor beneficio al contratar trabajadores formados. De manera análoga a lo que ocurre con los trabajadores, invertir en tecnología e innovar se asocia a estar en la vanguardia tecnológica. Con lo cual una firma puede dejar de ser innovadora abandonando la carrera tecnológica, y ser innovadora si se mantiene en carrera. Resumiremos estas estrategias como $S_F = \{I, NI\}$ (del inglés: *Innovative Firm* y *Non-Innovative Firm*).

El paso siguiente es definir los retornos que cada jugador percibe al darse una instancia del juego con dos estrategias dadas. Las combinaciones posibles de estrategias puras son $\{(S, I), (NS, I), (S, NI), (NS, NI)\}$ y para cada una de ellas tendremos el retorno de las firmas y de los trabajadores.

Llamaremos $\pi_W(\cdot, \cdot)$ y $\pi_F(\cdot, \cdot)$ a los retornos de los trabajadores y de las firmas respectivamente. Estos retornos dependen de una serie de parámetros económicos que se enumeran a continuación.

1. Parámetros de un Trabajador Formado (S):

- \bar{s} :
Es el salario básico que percibe un trabajador formado, ya sea contratado por una firma innovadora (I) como por una firma no innovadora (NI).
- \bar{p} :
Es la bonificación que percibe un trabajador formado al ser contratado por una firma innovadora (I).

- **CE:**
Es el costo que experimenta el trabajador formado por haber adquirido conocimiento y por mantenerlo actualizado.
2. Parámetros de un Trabajador No Formado (NS):
 - **s:**
Es el salario básico que percibe un trabajador no formado, ya sea contratado por una firma innovadora (I) como por una firma no innovadora (NI).
 - **p:**
Es la bonificación que percibe un trabajador no formado al ser contratado por una firma innovadora (I). La bonificación es menor para los trabajadores no formados que para los trabajadores formados ($\bar{p} > p$).
 3. Parámetros de una Firma Innovadora (I):
 - **$B_I(S)$:**
Es el beneficio que obtiene una firma innovadora (I) por contratar a un trabajador formado (S).
 - **$B_I(NS)$:**
Es el beneficio que obtiene una firma innovadora (I) por contratar a un trabajador no formado (NS).
 - **CI:**
Es el costo que tiene para la firma el invertir en tecnología que le permite innovar.
 4. Parámetros de una Firma No Innovadora (NI):
 - **$B_{NI}(S)$:**
Es el beneficio que obtiene una firma no innovadora (NI) por contratar a un trabajador formado (S).
 - **$B_{NI}(NS)$:**
Es el beneficio que obtiene una firma no innovadora (NI) por contratar a un trabajador no formado (NS).

Es necesario hacer mención de un par de puntos respecto a los parámetros que han sido definidos. Primero, las firmas innovadoras reparten bonos con todos sus empleados, tanto trabajadores formados así como no formados. Por el contrario, las firmas no innovadoras no tienen esta política. Segundo, simplemente con el objetivo de disminuir parámetros del modelo, se definieron costos solamente para los trabajadores formados y para las firmas innovadoras. Los mismos pueden ser vistos como el diferencial de costo entre formarse y no formarse, o el diferencial de costo entre innovar o no innovar.

A partir de los parámetros anteriores, podemos expresar los retornos netos de las firmas y de los trabajadores en función de los mismos. Esto se hace para cada una de las combinaciones de estrategias posibles entre firmas y trabajadores. Definimos por lo tanto los retornos para estrategias puras de trabajadores y firmas respectivamente como: $\pi_W : S_W \times S_F \rightarrow \mathbb{R}$ y $\pi_F : S_W \times S_F \rightarrow \mathbb{R}$.

Retornos de Trabajadores:

$$\begin{aligned}
\pi_W(S, I) &= \bar{s} + \bar{p} - CE \\
\pi_W(S, NI) &= \bar{s} - CE \\
\pi_W(NS, I) &= s + p \\
\pi_W(NS, NI) &= s
\end{aligned}$$

Retornos de Firmas:

$$\begin{aligned}
\pi_F(S, I) &= B_I(S) - (\bar{s} + \bar{p}) - CI \\
\pi_F(S, NI) &= B_{NI}(S) - \bar{s} \\
\pi_F(NS, I) &= B_I(NS) - (s + p) - CI \\
\pi_F(NS, NI) &= B_{NI}(NS) - s
\end{aligned}$$

Estos retornos para estrategias puras se pueden presentar en una bimatriz de manera usual. Colocando a los trabajadores como los jugadores por filas y a las firmas como jugadores por columnas.

	I	NI
S	$[\bar{s} + \bar{p} - CE] [B_I(S) - (\bar{s} + \bar{p}) - CI]$	$[\bar{s} - CE] [B_{NI}(S) - \bar{s}]$
NS	$[s + p] [B_I(NS) - (s + p) - CI]$	$[s] [B_{NI}(NS) - s]$

Lo siguiente es definir ciertas relaciones que deberán verificar los parámetros. Estas relaciones están basadas en argumentos económicos que llevan a que los retornos de los jugadores deban cumplir algunas desigualdades. A estas relaciones las llamaremos Complementaridades Estratégicas, las mismas ya estaban presentes en los trabajos de Accinelli et al. [Accinelli et al., 2010] y [Accinelli et al., 2011], ahora las extenderemos a este trabajo.

Como primera condición se requiere que, al ser contratado por una firma innovadora (I), el beneficio que experimenta un trabajador formado (S) sea mayor que el que percibe un trabajador no formado (NS). La misma se expresa como:

$$\bar{s} + \bar{p} - CE > s + p \quad (3.1)$$

En la segunda condición se asume que, al ser contratado por una firma no innovadora (NI), el beneficio que percibe un trabajador no formado (NS) es mayor que el que percibe un trabajador formado (S). La misma se expresa como:

$$s > \bar{s} - CE \quad (3.2)$$

La tercera condición dice que, si el trabajador es formado (S), entonces los beneficios de las firmas innovadoras son mayores que los de las firmas no innovadoras. Esta condición resulta en:

$$B_I(S) - \bar{p} - CI > B_{NI}(S) \quad (3.3)$$

Como cuarta condición asumiremos que, si el trabajador es no formado (NS), entonces los beneficios de las firmas no innovadoras son mayores que aquellos de las firmas innovadoras. La expresamos como:

$$B_{NI}(NS) > B_I(NS) - p - CI \quad (3.4)$$

Por último, se deberá verificar que la ganancia de una empresa innovadora (I) que contrata a un trabajador formado (S) deberá ser mayor a la que resulta de una empresa no innovadora (NI) que contrata a un trabajador no formado (NS). Se expresa como:

$$B_I(S) - \bar{s} - \bar{p} - CI > B_{NI}(NS) - s \quad (3.5)$$

Estas cinco inecuaciones tienen una influencia directa en los equilibrios de Nash del juego en estudio.

3.1.1.2. Cálculo de Equilibrios de Nash

Los equilibrios de Nash en estrategias puras se hallan de manera sencilla estudiando la funciones de mejores respuestas de los jugadores frente a estrategias puras: $\beta_W(s_F)$ con $s_F \in S_F$ y $\beta_F(s_W)$ con $s_W \in S_W$.

A partir de 3.1 y 3.2, para los trabajadores se tiene:

$$\begin{aligned} \beta_W(I) &= \{S\} \\ \beta_W(NI) &= \{NS\} \end{aligned}$$

Mientras que, usando 3.3 y 3.4, para las firmas se tiene:

$$\begin{aligned} \beta_F(S) &= \{I\} \\ \beta_F(NS) &= \{NI\} \end{aligned}$$

Se determinarán los equilibrios de Nash en estrategias puras usando las mejores respuestas halladas y el hecho que un par de estrategias forman un equilibrio de Nash sólo si ambas son mejores respuestas de los jugadores. A partir de lo anterior concluimos que $\Theta_1^{NE} = \{S, I\}$ y $\Theta_2^{NE} = \{NS, NI\}$.

Ahora se busca un equilibrio de Nash mixto. Se asume que los jugadores utilizan estrategias mixtas $x = (x_S, 1 - x_S) \in \Delta_W$ y $y = (y_I, 1 - y_I) \in \Delta_F$. Para hallar el equilibrio, debemos calcular los retornos esperados de los jugadores:

$$u_W(x, y) = x_S [y_I \pi_W(S, I) + (1 - y_I) \pi_W(S, NI)] + (1 - x_S) [y_I \pi_W(NS, I) + (1 - y_I) \pi_W(NS, NI)]$$

$$u_F(x, y) = y_I [x_S \pi_F(S, I) + (1 - x_S) \pi_F(NS, I)] + (1 - y_I) [x_S \pi_F(S, NI) + (1 - x_S) \pi_F(NS, NI)]$$

Impondremos las siguientes igualdades, que hacen a los jugadores indiferentes respecto de cambiar sus estrategias mixtas y por ende resultan en un equilibrio de Nash mixto.

$$u_W(e^S, y) = u_W(e^{NS}, y) \quad (3.6)$$

$$u_F(x, e^I) = u_F(x, e^{NI}) \quad (3.7)$$

Del sistema de ecuaciones anterior determinamos la siguiente expresión para el único equilibrio de Nash mixto del juego, $\Theta_3^{NE} = \{x^*, y^*\}$.

$$x_S^* = \frac{B_I(NS) - B_{NI}(NS) - p - CI}{B_I(NS) - B_I(S) + B_{NI}(S) - B_{NI}(NS) + \bar{p} - p} \quad (3.8)$$

$$y_I^* = \frac{CE - \bar{s} + s}{\bar{p} - p} \quad (3.9)$$

Dado que una estrategia mixta de un jugador es una probabilidad, debemos verificar que tanto $x_S^* \in [0, 1]$ como $y_I^* \in [0, 1]$. Respecto de x_S^* , a partir la inecuación 3.4 se concluye que el numerador en la ecuación 3.8 es negativo. Y usando la inecuación 3.3 se deduce que, en 3.8, el denominador es estrictamente menor que el numerador. Con lo cual se tiene que $0 < x_S^* < 1$. En cuanto a y_I^* , a partir de la definición de los bonos \bar{p} y p , se sabe que el denominador en la ecuación 3.9 es positivo. La ecuación 3.2 permite deducir que el numerador de la ecuación 3.9 es no negativo. Y finalmente, la ecuación 3.1 permite asegurar que el denominador es mayor al numerador en 3.9. Se tiene entonces que $0 < y_I^* < 1$.

En resumen, se tienen dos equilibrios de Nash en estrategias puras:

$$\Theta_1^{NE} = \{S, I\}$$

$$\Theta_2^{NE} = \{NS, NI\}$$

Y un equilibrio de Nash en estrategias mixtas:

$$\Theta_3^{NE} = \{(x_S^*, 1 - x_S^*), (y_I^*, 1 - y_I^*)\}$$

3.1.1.3. Trampa de Pobreza

En esta sección se verifica que el perfil de estrategias $\{NS, NI\}$ se comporta como una trampa de pobreza. Para que esto sea cierto se deben cumplir tres puntos específicos:

- i) Los jugadores no deben tener incentivos a apartarse de esa estrategia.
- ii) Debe haber otra situación de equilibrio en la cual al menos uno de los jugadores pueda tener mejor retorno y el restante no perciba un menor retorno.
- iii) Debe ser robusto frente a mutaciones. Es decir que sea imposible que una población escape de la trampa de pobreza a partir de pequeños desvíos de la misma.

Verificación ítem i):

Sabemos, a partir de 3.1.1.2, que el este ítem es cierto dado que $\{NS, NI\}$ es un equilibrio de Nash.

Verificación ítem ii):

Para el segundo ítem, se debe verificar que $\{NS, NI\}$ es pareto dominado por algún otro equilibrio de Nash. El candidato evidente para pareto dominar a $\{NS, NI\}$ es el equilibrio de Nash $\{S, I\}$, con lo cual se deben verificar las siguientes relaciones.

$$\pi_F(S, I) > \pi_F(NS, NI) \quad (3.10)$$

$$\pi_W(S, I) > \pi_W(NS, NI) \quad (3.11)$$

Para verificar que se cumple la inecuación 3.10, se debe recordar la inecuación 3.1 y que los bonos son positivos, lo cual implica $s + p > s$. A partir de esto, se llega a que $\bar{s} + \bar{p} - CE > s$ lo cual es equivalente a 3.10.

Finalmente, para verificar la inecuación 3.11 debemos recurrir a la inecuación 3.5, siendo una equivalente a la otra.

Verificación ítem iii):

Finalmente, para verificar que se cumple el ítem tres debemos estudiar si $\{NS, NI\}$ es un equilibrio evolutivamente estable (*ESS*). De acuerdo a lo expuesto en la Proposición 2.2.3, para verificar que un equilibrio es *ESS* alcanza con estudiar si el mismo es un equilibrio de Nash estricto.

El equilibrio de Nash $\{NS, NI\}$ es estricto si se verifica:

$$u_W(e^{NS}, e^{NI}) > u_W(x, e^{NI}), \forall x \in \Delta_W : x \neq e^{NS} \quad (3.12)$$

$$u_F(e^{NS}, e^{NI}) > u_F(e^{NS}, y), \forall y \in \Delta_F : y \neq e^{NI} \quad (3.13)$$

Dado que por definición: $u_W(x, e^{NI}) = x_S u_W(e^S, e^{NI}) + (1 - x_S) u_W(e^{NS}, e^{NI})$ y a una expresión análoga para $u_F(e^{NS}, y)$, las inecuaciones 3.12 y 3.13 se pueden expresar de la siguiente manera.

$$u_W(e^{NS}, e^{NI}) > u_W(e^S, e^{NI}) \quad (3.14)$$

$$u_F(e^{NS}, e^{NI}) > u_F(e^{NS}, e^I) \quad (3.15)$$

Y estas inecuaciones se cumplen dado que son equivalentes a las Complementaridades Estratégicas: 3.2 y 3.4.

Concluimos de esta manera que el perfil de estrategias $\{NS, NI\}$ es *ESS*. Y luego de haber verificado los tres puntos expresados al comienzo de esta sección se puede afirmar que el perfil de estrategias se comporta como una trampa de pobreza.

3.1.2. Proceso Estocástico del Replicador

En esta sección se presenta un proceso estocástico de evolución de poblaciones de dos clases de jugadores, trabajadores (W) y firmas (F). Las clases de jugadores se dividen en sub-poblaciones de trabajadores formados (S) y no formados (NS), así como en sub-poblaciones de empresas innovadoras (I) y no innovadoras (NI).

La dinámica estocástica queda determinada por el concepto de *Imitación de Agentes Exitosos*, el enfoque presentado en este trabajo está basado en [Weibull, 1997]. En estos modelos se asume que los agentes deciden revisar su estrategia cada una cierta cantidad de tiempo, aleatoria y distinta para cada sub-población. Luego que el agente ha decidido que va a revisar su estrategia, éste elige al azar otro agente de su misma clase de jugador (firmas o trabajadores), y toma la decisión de cambiar su estrategia a la del agente sorteado sólo si estima que éste es más exitoso que él. La medida del éxito estará dada en términos de los retornos esperados percibidos por los agentes.

En lo que sigue se describirán los elementos que componen los procesos estocásticos de las sub-poblaciones.

Primero, se definen los tamaños de las poblaciones de trabajadores y de firmas como N_W y N_F respectivamente. Tendremos una proporción fija de número de trabajadores a número de firmas, es decir $\eta = \frac{N_F}{N_W}$. Para fijar ideas podemos suponer que hay un número mayor de trabajadores que de firmas ($\eta < 1$).

Las clases de jugadores (firmas o trabajadores) están divididas en sub-poblaciones. Los trabajadores se dividen en los que eligen formarse (S) y los que deciden no formarse (NS). Y de la misma manera, las firmas se dividen en las que innovan (I) y las que no innovan (NI). Se deberá recordar que, a partir de lo expuesto en la Sección 3.1.1.1, se permite que los agentes pertenecientes a una clase de jugador hagan transiciones de una sub-población a otra. Lo cual permite definir en el proceso estocástico las transiciones de estados.

De aquí en más se indicarán con negrita los procesos estocásticos, de manera de evitar la variable aleatoria ω . Los nombres en mayúsculas se reservan para procesos vectoriales.

Los procesos estocásticos que dan los tamaños de las sub-poblaciones de trabajadores S y NS y firmas I y NI , serán los siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_S(\omega, t) &: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow R_W \\
\mathbf{n}_{NS}(\omega, t) &: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow R_W \\
\mathbf{n}_I(\omega, t) &: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow R_F \\
\mathbf{n}_{NI}(\omega, t) &: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow R_F
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Siendo $R_W = \{0, 1, \dots, N_W\} \subset \mathbb{N}$ y $R_F = \{0, 1, \dots, N_F\} \subset \mathbb{N}$ los recorridos de las variables aleatorias 3.16.

Dado que el interés radica en conocer la evolución de las proporciones de las sub-poblaciones respecto de las poblaciones totales de firmas y trabajadores, se analizarán los procesos estocásticos normalizados respecto del tamaño de las poblaciones a las que pertenecen. Quedarán expresados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_S(t) &= \frac{\mathbf{n}_S(t)}{N_W} \\
\mathbf{x}_{NS}(t) &= \frac{\mathbf{n}_{NS}(t)}{N_W} \\
\mathbf{y}_I(t) &= \frac{\mathbf{n}_I(t)}{N_F} \\
\mathbf{y}_{NI}(t) &= \frac{\mathbf{n}_{NI}(t)}{N_F}
\end{aligned}$$

Siendo ahora los dominios de estos procesos, grillas de puntos equi-espaciados en el intervalo $[0, 1] \in \mathbb{R}$. Mas precisamente, $G_W = \left\{0, \frac{1}{N_W}, \dots, 1\right\} \subset [0, 1]$ y $G_F = \left\{0, \frac{1}{N_F}, \dots, 1\right\} \subset [0, 1]$. Las densidades de puntos de las grillas dependen solamente de N_W ya que $\frac{1}{N_F} = \frac{1}{\eta} \frac{1}{N_W}$.

Podemos resumir los procesos normalizados anteriores en un proceso estocástico vectorial. $\mathbf{X}(\omega, t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow S$. Siendo $S = G_W^2 \times G_F^2 \subset \mathbb{R}^4$ el espacio de estados del proceso vectorial.

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_S(t) \\ \mathbf{x}_{NS}(t) \\ \mathbf{y}_I(t) \\ \mathbf{y}_{NI}(t) \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Para terminar de definir los procesos de las poblaciones, debemos definir las transiciones de $\mathbf{X}(t)$ y sus tasas correspondientes. A continuación se enumeran solamente las transiciones posibles, siendo aquellas las transiciones con tasa no nula. En lo que sigue, indicaremos como $\tau_{A,B}$ a la transición del estado $A \in S$ al estado $B \in S$.

1. Transición de un Agente de tipo S a tipo NS .

$$\tau_{S,NS} = \frac{1}{N_W} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

2. Transición de un Agente de tipo NS a tipo S .

$$\tau_{NS,S} = \frac{1}{N_W} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

3. Transición de un Agente de tipo I a tipo NI .

$$\tau_{I,NI} = \frac{1}{\eta N_W} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

4. Transición de un Agente de tipo NI a tipo I .

$$\tau_{NI,I} = \frac{1}{\eta N_W} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Para determinar sus respectivas tasas, se asumen algunas hipótesis:

- i) Las revisiones de estrategias de los agentes individuales ocurren de acuerdo a procesos de *Poisson* independientes de cierta tasa, la llamaremos r para fijar ideas.
- ii) Las ocurrencias de cambios de estrategia se obtienen dividiendo el proceso de revisiones en dos mediante un sorteo independiente, de probabilidad p para fijar ideas. Con lo cual, una vez que revisa su estrategia, el agente cambia de estrategia con probabilidad p .

A partir de las hipótesis anteriores, la propiedad de división de procesos de *Poisson* asegura que las ocurrencias de cambios de estrategia de un agente individual son también un proceso de *Poisson*, pero con tasa igual a: $p r$.

Finalmente, si tenemos n agentes idénticos e independientes, los cambios de estrategia del agregado de los n agentes ocurren, dada la propiedad de suma de procesos de *Poisson* independientes, como otro proceso de *Poisson* de tasa igual a: $n p r$.

Esto último es lo que se utilizará para determinar las tasas de cada una de las transiciones. Para aliviar la notación usaremos los siguientes nombres: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_S(t), \mathbf{x}_{NS}(t)) \in G_W^2$ e $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_I(t), \mathbf{y}_{NI}(t)) \in G_F^2$.

Las tasas de las transiciones entre estados se definen como funciones: $q : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Observemos que conocer una pareja ordenada de estados $(v, v') \in S \times S$, de salida y llegada respectivamente, equivale a conocer $\tau_{v,v'} = v' - v$ y el vector de salida v . Definimos a partir de lo anterior $q(\tau, X)$ como la tasa de transición desde el estado $X \in S$ al estado $X + \tau \in S$.

$$q(\tau_{S,NS}, \mathbf{X}(t)) = N_W \mathbf{x}_S(t) p_{S \rightarrow NS}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) r_S(\mathbf{y}) \quad (3.22)$$

$$q(\tau_{NS,S}, \mathbf{X}(t)) = N_W \mathbf{x}_{NS}(t) p_{NS \rightarrow S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) r_{NS}(\mathbf{y}) \quad (3.23)$$

$$q(\tau_{I,NI}, \mathbf{X}(t)) = N_F \mathbf{y}_I(t) p_{I \rightarrow NI}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) r_I(\mathbf{x}) \quad (3.24)$$

$$q(\tau_{NI,I}, \mathbf{X}(t)) = N_F \mathbf{y}_{NI}(t) p_{NI \rightarrow I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) r_{NI}(\mathbf{x}) \quad (3.25)$$

Debemos ahora definir el valor de las tasas de revisión: $r_S(y)$, $r_{NS}(y)$, $r_I(x)$ y $r_{NI}(x)$, dados $x \in \Delta_W$ e $y \in \Delta_F$. En el modelo de imitación de agentes exitosos, las tasas de revisión para las distintas sub-poblaciones serán decrecientes en función del retorno que percibe el agente. El objetivo es modelar el hecho que un agente que percibe un retorno alto revisará menos su estrategia que uno que percibe un retorno bajo. A continuación se presentan los valores de las tasas de revisión de un agente para las distintas sub-poblaciones, se asume un modelo lineal para estas tasas, basado en [Weibull, 1997].

$$r_S(y) = \alpha^W - \beta^W u_W(e^S, y) \quad (3.26)$$

$$r_{NS}(y) = \alpha^W - \beta^W u_W(e^{NS}, y) \quad (3.27)$$

$$r_I(x) = \alpha^F - \beta^F u_F(x, e^I) \quad (3.28)$$

$$r_{NI}(x) = \alpha^F - \beta^F u_F(x, e^{NI}) \quad (3.29)$$

Para que estas tasas sean no negativas y decrecientes en los retornos esperados, se deben verificar las siguientes relaciones:

$$\beta^W, \beta^F > 0 \quad (3.30)$$

$$\alpha^W / \beta^W \geq u_W(x, y), \forall x \in \Delta_W \text{ e } y \in \Delta_F \quad (3.31)$$

$$\alpha^F / \beta^F \geq u_F(x, y), \forall x \in \Delta_W \text{ e } y \in \Delta_F \quad (3.32)$$

Ahora se deben definir las probabilidades de que, dado que decidió revisar su estrategia, un agente cambie de estrategia.

Veamos el primer caso, el de los agentes tipo S . Éstos deciden cambiar a NS si sortean al azar a un agente tipo NS y si la comparación de retornos esperados percibidos es favorable al agente NS .

Se tiene por lo tanto:

$$p_{S \rightarrow NS}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{NS} \Pr(\hat{u}_W(e^{NS}, \mathbf{y}) > \hat{u}_W(e^S, \mathbf{y})) \quad (3.33)$$

De manera completamente análoga, hallamos las otras probabilidades:

$$p_{NS \rightarrow S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_S \Pr(\hat{u}_W(e^S, \mathbf{y}) > \hat{u}_W(e^{NS}, \mathbf{y})) \quad (3.34)$$

$$p_{I \rightarrow NI}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{NI} \Pr(\hat{u}_F(\mathbf{x}, e^{NI}) > \hat{u}_F(\mathbf{x}, e^I)) \quad (3.35)$$

$$p_{NI \rightarrow I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_I \Pr(\hat{u}_F(\mathbf{x}, e^I) > \hat{u}_F(\mathbf{x}, e^{NI})) \quad (3.36)$$

Resta definir las probabilidades de los sucesos de comparaciones de retornos esperados percibidos. Se busca representar el hecho que los agentes no conocen con certeza el retorno esperado que perciben para la distribución de población actual, ni tampoco el que percibe el agente que sortearon. Esta falta de certeza puede surgir de varios factores como ser la información incompleta que tienen para calcular sus retornos esperados, sus preferencias, las cuales

pueden hacer que exista cierto sesgo en la comparación de retornos, o directamente de posibles errores en sus estimaciones de los retornos esperados.

Estos retornos esperados percibidos por los agentes se diferenciarán solamente entre firmas y trabajadores, y no por sub-poblaciones. Esto es una simplificación de la realidad, donde seguramente las distintas sub-poblaciones pueden cometer distintos errores al estimar los retornos esperados. Sin embargo, este modelo simplificado incorpora el efecto de la incertidumbre en la comparación de retornos esperados, y los análisis que se llevan a cabo son generalizables a un modelo con más parámetros de incertidumbre en los retornos esperados percibidos.

Para los trabajadores supondremos que, siendo ε variables aleatorias tales que $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_W^2)$ i.i.d, se verifica:

$$\hat{u}_W(x, y) = u_W(x, y) + \varepsilon$$

Mientras que para las firmas se tiene que, siendo ξ variables aleatorias tales que $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma_F^2)$ i.i.d, se verifica:

$$\hat{u}_F(x, y) = u_F(x, y) + \xi$$

En el Apéndice B se detallan las deducciones de las probabilidades de cambio de estrategia de los agentes en función de la distribución Normal Estándar ($\Phi(z)$).

Se resumen a continuación las probabilidades de las comparaciones de retornos esperados:

$$\Pr(\hat{u}_W(e^{NS}, y) > \hat{u}_W(e^S, y)) = \Phi\left(\frac{u_W(e^{NS} - e^S, y)}{\sqrt{2}\sigma_W}\right) = f_W(y) \quad (3.37)$$

$$\Pr(\hat{u}_W(e^S, y) > \hat{u}_W(e^{NS}, y)) = \Phi\left(\frac{u_W(e^S - e^{NS}, y)}{\sqrt{2}\sigma_W}\right) = 1 - f_W(y) \quad (3.38)$$

$$\Pr(\hat{u}_F(x, e^{NI}) > \hat{u}_F(x, e^I)) = \Phi\left(\frac{u_F(x, e^{NI} - e^I)}{\sqrt{2}\sigma_F}\right) = f_F(x) \quad (3.39)$$

$$\Pr(\hat{u}_F(x, e^I) > \hat{u}_F(x, e^{NI})) = \Phi\left(\frac{u_F(x, e^I - e^{NI})}{\sqrt{2}\sigma_F}\right) = 1 - f_F(x) \quad (3.40)$$

Dadas las expresiones anteriores, las tasas de las transiciones quedan totalmente definidas para el proceso de imitación de agentes exitosos. Las resumimos a continuación:

$$\begin{aligned} q(\tau_{S,NS}, \mathbf{X}(t)) &= N_W \mathbf{x}_S(t) \mathbf{x}_{NS}(t) (\alpha^W - \beta^W u_W(e^S, \mathbf{y})) f_W(\mathbf{y}) \\ q(\tau_{NS,S}, \mathbf{X}(t)) &= N_W \mathbf{x}_S(t) \mathbf{x}_{NS}(t) (\alpha^W - \beta^W u_W(e^{NS}, \mathbf{y})) (1 - f_W(\mathbf{y})) \\ q(\tau_{I,NI}, \mathbf{X}(t)) &= \eta N_W \mathbf{y}_I(t) \mathbf{y}_{NI}(t) (\alpha^F - \beta^F u_F(\mathbf{x}, e^I)) f_F(\mathbf{x}) \\ q(\tau_{NI,I}, \mathbf{X}(t)) &= \eta N_W \mathbf{y}_I(t) \mathbf{y}_{NI}(t) (\alpha^F - \beta^F u_F(\mathbf{x}, e^{NI})) (1 - f_F(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Dadas las transiciones y sus respectivas tasas, es posible simular de manera directa el proceso estocástico vectorial, partiendo de una condición inicial cualquiera. Dichas simulaciones se pueden encontrar en el Capítulo 4.

3.1.3. Dinámica del Replicador

Desde esta sección en adelante usaremos los mismos nombres, pero sin negrita, para las funciones determinísticas que aproximan los procesos estocásticos homónimos. Por ejemplo la aproximación determinística del proceso $\mathbf{X}(t)$ se indicará como $X(t)$.

El sistema de ecuaciones diferenciales del replicador surge como límite, para una población infinita, del proceso estocástico del replicador. En la Sección 3.1.3.1 se deducirá, a partir del proceso estocástico 3.17, el sistema de EDOs que surge como límite para poblaciones infinitas. Luego en la Sección 3.1.3.2, se estudiarán las propiedades principales del sistema de EDOs hallado y su relación con el juego de base. Finalmente, en la Sección 3.1.3.3 se demostrará un tipo de convergencia del proceso estocástico a la solución del sistema de EDOs bajo hipótesis dadas.

3.1.3.1. Deducción del Sistema de EDOs

Como primer enfoque, presentamos el método de Balance de Flujos para hallar el sistema de EDOs del replicador para poblaciones infinitas de agentes. El método es relativamente informal, pero tiene como ventaja su sencillez y su valor intuitivo. El mismo consiste en asimilar las transiciones agregadas de los infinitos agentes a flujos continuos determinísticos, dados por las tasas de transición del proceso estocástico.

Una justificación informal para la equivalencia entre flujos estocásticos y determinísticos es que, a partir de la Ley Fuerte de los Grandes Números, sabemos que para poblaciones infinitas las tasas coinciden con el número esperado de transiciones por unidad de tiempo.

Se pueden plantear entonces relaciones diferenciales que surgen de balances de flujos salientes y entrantes de las sub-poblaciones, se esquematizan estas relaciones en la siguientes ecuaciones.

$$\frac{d}{dt}x_S(t) = \sum \text{Flujo Entrante}(S) - \sum \text{Flujo Saliente}(S) \quad (3.41)$$

$$\frac{d}{dt}y_I(t) = \sum \text{Flujo Entrante}(I) - \sum \text{Flujo Saliente}(I) \quad (3.42)$$

Observando 3.41, el flujo entrante a la sub-población S , son los agentes NS que deciden cambiar su estrategia a S . A partir de 3.1.2 se sabe que la tasa para el flujo (normalizada respecto de la población N_W) es igual a: $r_{NS}(y) x_S (1 - x_S) (1 - f_W(y))$. Mientras que la tasa, también normalizada, correspondiente a la salida de agentes de la sub-población S es igual a: $r_S(y) x_S (1 - x_S) f_W(y)$.

A partir de los flujos anteriores y simplificando, podemos escribir la siguiente EDO:

$$\dot{x}_S = x_S (1 - x_S) [r_{NS}(y) (1 - f_W(y)) - r_S(y) f_W(y)]$$

Si se observa la ecuación 3.42, en la sub-población I el flujo entrante son los agentes NI , que deciden cambiar su estrategia a I . Y la tasa normalizada respecto de la población N_F es igual a: $r_{NI}(x) y_I (1 - y_I) (1 - f_F(x))$. Mientras que el flujo de salida, dado por los agentes I que cambian a NI , tiene tasa igual a: $r_I(x) y_I (1 - y_I) f_F(x)$.

Dados los flujos anteriores, escribimos la siguiente EDO:

$$\begin{aligned}\dot{y}_I &= r_{NI}(x) y_I (1 - y_I) (1 - f_F(x)) - r_I(x) y_I (1 - y_I) f_F(x) \\ \dot{y}_I &= y_I (1 - y_I) [r_{NI}(x) (1 - f_F(x)) - r_I(x) f_F(x)]\end{aligned}$$

El hecho que las sub-poblaciones x_{NS} y y_{NI} son complementarias a las x_S y y_I respectivamente, permite hallarlas en función de estas últimas.

En resumen, hemos hallado el sistema de EDOs del replicador para el proceso estocástico 3.17, lo llamaremos \mathcal{DR} .

$$\mathcal{DR} \begin{cases} \dot{x}_S = x_S (1 - x_S) [r_{NS}(y) (1 - f_W(y)) - r_S(y) f_W(y)] \\ \dot{y}_I = y_I (1 - y_I) [r_{NI}(x) (1 - f_F(x)) - r_I(x) f_F(x)] \end{cases}$$

A continuación se presenta un segundo enfoque para deducir las EDOs del replicador a partir del proceso estocástico. La idea central es la de reescribir dicho proceso en forma integral y luego tomar límite en el tamaño de la población (N_W) para llegar a una ecuación integral determinística. Esta ecuación integral determinística termina siendo el sistema de EDOs del replicador que buscamos. Trabajaremos con $\mathbf{X}(t)$, el proceso normalizado respecto de los tamaños de poblaciones.

En primer lugar tendremos que definir para cada estado del proceso ($v \in S$) el vector de *Drift*, como la suma de los productos de los vectores de transición por sus respectivas tasas.

Definición 3.1.1 (Drift del Proceso Estocástico) *Se define el Drift del proceso estocástico $\{\mathbf{X}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+} \subset S$ como la función $\gamma : S \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que:*

$$\gamma(v) = \sum_{v' \neq v} (v' - v) q(v, v') \quad (3.43)$$

Siendo $q(v, v')$ la tasa de transición del estado $v \in S$ al estado $v' \in S$.

A continuación, usaremos la definición 3.1.1 para escribir el proceso normalizado de la Sección 3.1.2 en forma integral.

$$\mathbf{X}(t) = X_0 + \mathbf{M}(t) + \int_0^t \gamma(\mathbf{X}(s)) ds \quad (3.44)$$

La ecuación 3.44 sirve como definición para el proceso $\mathbf{M}(t)$, y X_0 es el estado inicial (determinístico) de las poblaciones.

En la Sección 3.1.3.3 probaremos la convergencia- L^1 uniforme en compactos del proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$ a la función $X(t)$ solución de \mathcal{DR} .

De manera informal, se puede pensar en que si se toma el límite $N_W \rightarrow \infty$, la ecuación integral estocástica se reduce a una ecuación integral determinística, ya que $\mathbf{M}(t)$ es una Martingala que se aproxima a 0 en el límite. Y el *Drift* tiende a una función determinística que será el campo vectorial del sistema de EDOs resultante.

La ecuación integral determinística a la cual se aproxima la estocástica para poblaciones infinitas es por lo tanto:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t g(X(s)) ds \quad (3.45)$$

Si se deriva la ecuación 3.45 respecto de t , obtenemos el sistema de EDOs en forma diferencial:

$$\mathcal{DR} \begin{cases} \dot{X}(t) = g(X(t)) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Donde el campo vectorial ($\forall X \in \mathbb{R}^4$) del sistema de EDOs es:

$$g(X) = \lim_{N_W \rightarrow \infty} \gamma(X)$$

Deseamos determinar el campo vectorial de \mathcal{DR} para el proceso estocástico presentado en la Sección 3.1.2. Para ello debemos calcular su *Drift* utilizando la definición 3.1.1 junto a las tasas y transiciones del proceso mencionado previamente.

Tomando $X = (x_S, x_{NS}, y_I, y_{NI})^T \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} \gamma(X) &= \sum_{X' \neq X} (X' - X) q(X, X') \\ &= \tau_{S,NS} q(\tau_{S,NS}) + \tau_{NS,S} q(\tau_{NS,S}) + \\ &\quad \tau_{I,NI} q(\tau_{I,NI}) + \tau_{NI,I} q(\tau_{NI,I}) \\ &= \frac{q(\tau_{S,NS})}{N_W} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{q(\tau_{NS,S})}{N_W} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &\quad \frac{q(\tau_{I,NI})}{\eta N_W} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{q(\tau_{NI,I})}{\eta N_W} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_S x_{NS} [r_{NS}(y)(1 - f_W(y)) - r_S(y)f_W(y)] \\ x_S x_{NS} [r_S(y)f_W(y) - r_S(y)(1 - f_W(y))] \\ y_I y_{NI} [r_{NI}(x)(1 - f_F(x)) - r_I(x)f_F(x)] \\ y_I y_{NI} [r_I(x)f_F(x) - r_{NI}(x)(1 - f_F(x))] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es importante notar que la función $\gamma : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ no depende de N_W . Con lo cual tenemos que $g(X) = \gamma(X), \forall X \in \mathbb{R}^4$. En consecuencia hemos hallado la expresión del campo vectorial de \mathcal{DR} .

Podemos expresar entonces la dinámica del replicador para todos los componentes de las poblaciones:

$$\mathcal{DR} \begin{cases} \dot{x}_S(t) = x_S x_{NS} [r_{NS}(y)(1 - f_W(y)) - r_S(y)f_W(y)] \\ \dot{x}_{NS}(t) = x_S x_{NS} [r_S(y)f_W(y) - r_{NS}(y)(1 - f_W(y))] \\ \dot{y}_I(t) = y_I y_{NI} [r_{NI}(x)(1 - f_F(x)) - r_I(x)f_F(x)] \\ \dot{y}_{NI}(t) = y_I y_{NI} [r_I(x)f_F(x) - r_{NI}(x)(1 - f_F(x))] \end{cases} \quad (3.47)$$

A los efectos de simplificar el problema de resolver numéricamente la EDO del replicador, se reducirá la dimensión del sistema de EDOs de cuatro a dos. Para lo cual debemos relacionar $\forall t \in \mathbb{R}^+$ las funciones incógnitas del sistema de EDOs.

Sumando las primeras dos componentes de 3.47 vemos que: $\dot{x}_S(t) + \dot{x}_{NS}(t) = 0$. Y sabiendo que para $t = 0$ se cumple: $x_S(0) + x_{NS}(0) = 1$, podemos asegurar que $\forall t \in \mathbb{R}^+$:

$$x_S(t) + x_{NS}(t) = 1$$

Y con un razonamiento análogo se deduce $\forall t \in \mathbb{R}^+$ que:

$$y_I(t) + y_{NI}(t) = 1$$

Las relaciones anteriores permiten tomar $x = (x_S(t), 1 - x_S(t))$ e $y = (y_I(t), 1 - y_I(t))$. Con lo cual, el sistema reducido a dimensión dos resulta:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_S(t) \\ \dot{y}_I(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_S(t)(1 - x_S(t)) [r_{NS}(y)(1 - f_W(y)) - r_S(y)f_W(y)] \\ y_I(t)(1 - y_I(t)) [r_{NI}(x)(1 - f_F(x)) - r_I(x)f_F(x)] \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Este sistema coincide con el hallado por medio del balance de flujos. Con lo cual verificamos que el método de balance de flujos se puede deducir a partir del método basado en el cálculo del *Drift*.

3.1.3.2. Propiedades del Sistema de EDOs

En la presente sección resumiremos algunas propiedades que verifica 3.47. Las propiedades son tanto del propio sistema de EDOs, así como propiedades de su relación con el juego no cooperativo de base.

En primer lugar, el campo vectorial de la ecuación 3.47 es continuo y diferenciable en \mathbb{R}^4 , y por lo tanto es Lipschitz Continuo en $[0, 1]^4$. Y dado el Teorema de Picard (ver Capítulo 8.3 de [Hirsch and Smale, 1974]), se puede asegurar la existencia y unicidad de las soluciones de la \mathcal{DR} .

En segundo lugar, la dinámica del replicador que hemos planteado cumple con algunas definiciones importantes. En particular, se puede verificar que su función de crecimiento es regular y monótona en los retornos (ver 2.2.3). La regularidad se cumple ya que hemos verificado en la Sección 3.1.3.1 que la suma de las derivadas de las sub-poblaciones de trabajadores, así como la de firmas, son iguales a cero. La verificación de la propiedad monótona en los retornos se basa en el cálculo de:

$$q_{W,S}(X) - q_{W,NS}(X) \quad (3.49)$$

$$q_{F,I}(X) - q_{F,NI}(X) \quad (3.50)$$

Se debe verificar que si una estrategia percibe un retorno mayor el que percibe otra, entonces sus respectivas funciones de crecimiento cumplen la misma relación. Esto se refleja en el signo de 3.49 y 3.50. Haremos dicha verificación a modo de ejemplo con S y NS .

$$\begin{aligned} q_{W,S}(X) - q_{W,NS}(X) &= x_{NS} [r_{NS}(y)(1 - f_W(y)) - r_S(y)f_W(y)] - \\ &\quad x_S [r_S(y)f_W(y) - r_S(y)(1 - f_W(y))] \\ &= r_{NS}(y)(1 - f_W(y)) - r_S(y)f_W(y) \end{aligned}$$

Supongamos que:

$$u_W(e^S, y) > u_W(e^{NS}, y)$$

Dada esta relación, se puede observar a partir de las definiciones 3.37 y 3.26:

$$\begin{aligned} 1 - f_W(y) &> f_W(y) \\ r_{NS}(y) &> r_S(y) \end{aligned}$$

Y por lo tanto se cumple:

$$r_{NS}(y)(1 - f_W(y)) > r_S(y)f_W(y)$$

O lo que es lo mismo:

$$q_{W,S}(X) > q_{W,NS}(X)$$

Un cálculo idéntico al realizado permite probar la equivalencia entre: $u_F(x, e^I) > u_F(x, e^{NI})$ y $q_{F,I}(X) > q_{F,NI}(X)$. De esta manera, la monotonía en los retornos queda comprobada.

Dada la Proposición 2.2.7 y dado que las firmas y los trabajadores tienen solamente dos estrategias cada uno, se cumple que, además de ser monótona, la función de crecimiento es positiva en los retornos. La demostración de esta equivalencia se encuentra en el Apéndice A. En consecuencia, la dinámica se encuentra en las hipótesis del siguiente teorema:

Teorema 3.1.2 (Weibull 1997) *Todo equilibrio de Nash estricto es asintóticamente estable en cualquier dinámica de selección con función de crecimiento positiva en los retornos.*

En la Sección 3.1.1.3 observamos que el equilibrio de Nash que llamamos Trampa de Pobreza, es estricto. Con lo cual podemos concluir que en la dinámica del replicador el punto $\{x_S = 0, y_I = 0\}$ será un punto asintóticamente estable de la dinámica. Esto motiva el análisis de su cuenca de atracción por medio de métodos numéricos que se realiza en el Capítulo 4.

Otra propiedad importante de la \mathcal{DR} es que los equilibrios de Nash hallados en la Sección 3.1.1.2 son puntos estacionarios de dicho sistema de EDOs; un análisis general de este punto puede encontrarse en el Capítulo 5 de [Weibull, 1997]. A continuación verificaremos la afirmación anterior para cada uno de los equilibrios de Nash del juego.

Proposición 3.1.3 *El equilibrio $\Theta_1^{NE} = \{S, I\}$ es un punto estacionario de \mathcal{DR} .*

Prueba El perfil de estrategias $\Theta_1^{NE} = \{S, I\}$ en términos de poblaciones normalizadas equivale a que: $x_S = 1$ e $y_I = 1$, y sustituyendo estos valores en 3.47 se obtiene: $\dot{x}_S(t) = 0$, $\dot{y}_I(t) = 0$. Con lo cual el primer equilibrio de Nash puro es un punto estacionario de \mathcal{DR} .

Proposición 3.1.4 *El equilibrio $\Theta_2^{NE} = \{NS, NI\}$ es un punto estacionario de \mathcal{DR} .*

La verificación de esta propiedad es idéntica a la Propiedad 3.1.3.

Proposición 3.1.5 *El equilibrio $\Theta_3^{NE} = \{(x_S^*, 1 - x_S^*), (y_I^*, 1 - y_I^*)\}$ es un punto estacionario de \mathcal{DR} .*

Prueba Dadas las expresiones halladas para x_S^* y y_I^* (ver 3.8 y 3.9), basta con recordar que los retornos esperados verifican las igualdades 3.6 y 3.7. A partir de estas dos condiciones, se puede verificar que:

$$f_W((y_I^*, 1 - y_I^*)) = 1/2 \quad (3.51)$$

$$f_F((x_S^*, 1 - x_S^*)) = 1/2 \quad (3.52)$$

$$r_S((y_I^*, 1 - y_I^*)) = r_{NS}((y_I^*, 1 - y_I^*)) \quad (3.53)$$

$$r_I((x_S^*, 1 - x_S^*)) = r_{NI}((x_S^*, 1 - x_S^*)) \quad (3.54)$$

Sustituyendo las condiciones anteriores en la ecuación 3.47, resulta que: $\dot{x}_S(t) = 0$, $\dot{y}_I(t) = 0$. Verificándose que el equilibrio de Nash mixto también es estacionario.

Observación Vale la pena observar que hay otros puntos estacionarios que no son equilibrios de Nash: $\{x_S = 0, y_I = 1\}$ y $\{x_S = 1, y_I = 0\}$.

En el Capítulo 4 se pueden ver, para ciertos valores de los parámetros del modelo, el diagrama de flujos del campo vectorial de la ecuación 3.48, trazas de soluciones para ciertas condiciones iniciales y los puntos estacionarios.

3.1.3.3. Convergencia del Proceso Estocástico del Replicador

En esta sección se analiza la convergencia del proceso estocástico a la solución del sistema de EDOs (\mathcal{DR}) que hallamos en la Sección 3.1.3.1.

El primer motivo para este análisis es el deseo de formalizar la deducción de \mathcal{DR} mediante el cálculo del *Drift*.

El segundo motivo es el de justificar de manera formal que, para poblaciones grandes pero finitas, el estudio del modelo estocástico del replicador mediante la dinámica determinística es una aproximación aceptable. Esta afirmación se verificará numéricamente en el Capítulo 4 mediante simulaciones del proceso estocástico para distintos tamaños de poblaciones.

El resultado que demostraremos en esta sección está basado en resultados del trabajo [Darling and Norris, 2008] y del libro [Robert, 2003], en los que se estudian procesos similares a los presentados en esta tesis.

Dado que una Martingala ocupa un lugar central en el teorema de convergencia, referimos al lector no especializado al Apéndice C.1 por la definición y una breve descripción de este tipo de proceso estocástico. A su vez, en el mismo Apéndice C se presentan dos lemas que son necesarios para la demostración.

Teorema 3.1.6 *El proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$ (3.17) converge, en norma L^1 y uniformemente en $[0, T]$, a $X(t)$ solución del sistema de EDOs (3.47).*

$$\lim_{N_W \rightarrow \infty} E \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{X}(t) - X(t)\| \right) = 0$$

Siendo $\|\cdot\|$ la norma euclídea.

Prueba En primer lugar se plantea el proceso estocástico (3.17) en forma integral:

$$\mathbf{X}(t) = X_0 + \mathbf{M}(t) + \int_0^t \gamma(\mathbf{X}(s)) ds \quad (3.55)$$

La ecuación anterior oficia de definición para el proceso $\mathbf{M}(t)$.

También se puede representar de manera integral el sistema de EDOs del replicador (3.47):

$$X(t) = X_0 + \int_0^t g(X(s)) ds \quad (3.56)$$

Restando las ecuaciones 3.55 y 3.56, y tomando norma euclídea obtenemos:

$$\|\mathbf{X}(t) - X(t)\| \leq \|\mathbf{M}(t)\| + \left\| \int_0^t \gamma(\mathbf{X}(s)) - g(X(s)) ds \right\| \quad (3.57)$$

$$\|\mathbf{X}(t) - X(t)\| \leq \|\mathbf{M}(t)\| + \int_0^t \|\gamma(\mathbf{X}(s)) - g(X(s))\| ds \quad (3.58)$$

A partir de los cálculos realizados en la Sección 3.1.3.1, se sabe que: $\gamma(v) = g(v)$, $\forall v \in \mathbb{R}^4$. También sabemos a partir de lo observado en la Sección 3.1.3.2, que $g(v)$ es Lipschitz. Con lo cual, $\forall v, w \in [0, 1]^4$ se verifica para la norma euclídea $\|g(v) - g(w)\| \leq L \|v - w\|$, con $L \in \mathbb{R}^+$.

$$\|\mathbf{X}(t) - X(t)\| \leq \|\mathbf{M}(t)\| + \int_0^t L \|\mathbf{X}(s) - X(s)\| ds \quad (3.59)$$

Se define la función aleatoria, $f(s) = \sup_{t \in [0, s]} \|\mathbf{X}(t) - X(t)\|$. La desigualdad 3.59 se sigue verificando al tomar supremo respecto de t en $[0, T]$ y usando el Lema C.2.1 tenemos:

$$f(T) \leq \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{M}(t)\| + \int_0^T L f(s) ds \quad (3.60)$$

Podemos ahora tomar valor esperado de la desigualdad.

$$E(f(T)) \leq E \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{M}(t)\| \right) + \int_0^T L E(f(s)) ds \quad (3.61)$$

Debemos acotar el valor esperado del supremo de $\|\mathbf{M}(t)\|$. Para ello acotaremos el cuadrado del valor esperado usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Lema C.2.2.

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{M}(t)\| \right)^2 \leq E \left(\left[\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{M}(t)\| \right]^2 \right) \quad (3.62)$$

$$\leq E \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{M}(t)\|^2 \right) \quad (3.63)$$

Definiendo $\alpha : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ como:

$$\alpha(v) = \sum_{v' \neq v} \|v' - v\|^2 q(v, v') \quad (3.64)$$

En el trabajo [Darling and Norris, 2008] se prueba que $\mathbf{M}(t)$ es una martingala (ver C.1) y en la Proposición 8.7 se demuestra la siguiente desigualdad:

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{M}(t)\|^2 \right) \leq 4 E \left(\int_0^T \alpha(\mathbf{X}(t)) dt \right) \quad (3.65)$$

A partir de 3.63 y 3.65, e intercambiando integral por valor esperado obtenemos las siguientes desigualdades:

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{M}(t)\| \right) \leq 2 \sqrt{E \left(\int_0^T \alpha(\mathbf{X}(t)) dt \right)} \quad (3.66)$$

$$\leq 2 \sqrt{\int_0^T E[\alpha(\mathbf{X}(t))] dt} \quad (3.67)$$

En el Apéndice C.3 se presentan los cálculos de una cota para $E[\alpha(\mathbf{X}(t))]$; que permiten llegar, usando 3.67, a la siguiente cota con $c \in \mathbb{R}^+$:

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{M}(t)\| \right) \leq 2 \sqrt{\frac{c T}{N_W}} \quad (3.68)$$

Volviendo a la inecuación 3.61 y usando 3.68 tenemos:

$$E(f(T)) \leq 2 \sqrt{\frac{c T}{N_W}} + \int_0^T L E(f(s)) ds \quad (3.69)$$

Y finalmente, dada la desigualdad 3.69, el lema de Grönwall (ver C.4.1) permite concluir que:

$$E(f(T)) \leq 2 \frac{\sqrt{cT} e^{LT}}{\sqrt{N_W}} \quad (3.70)$$

Tomando límite con $N_W \rightarrow \infty$, llegamos a la tesis. ■

A partir del teorema anterior y la desigualdad de Markov, podemos presentar el resultado de convergencia en términos de probabilidades. Dado $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ se tiene que:

$$\Pr \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{X}(t) - X(t)\| < \epsilon \right) \geq 1 - 2 \frac{\sqrt{cT} e^{LT}}{\sqrt{N_W} \epsilon}$$

Una observación interesante es que en el Capítulo 11 del libro de [Ethier and Kurtz, 1986], se presenta un resultado para procesos Markovianos en el que afirma que $\mathbf{X}(t) = X(t) + \mathbf{V}_n(t)/\sqrt{N_W}$, siendo $\mathbf{V}_n(t)$ un proceso Gaussiano que verifica una ecuación diferencial estocástica conocida. Esto tiene al menos dos aplicaciones potenciales, la primera es que dado que el proceso es Gaussiano se podría tratar de construir, vía un teorema central del límite, bandas de confianza para las trayectorias del proceso $\mathbf{X}(t)$, para poblaciones grandes pero no infinitas. Y en segundo lugar, teniendo una ecuación diferencial estocástica para $\mathbf{V}_n(t)$, se podrían obtener trazas del proceso para poblaciones grandes de manera económica. Bastaría con resolver numéricamente tanto la EDO determinística como la ecuación diferencial estocástica y componer la aproximación del proceso $\mathbf{X}(t)$ a partir de ambas soluciones. Estos puntos se presentarán nuevamente en el Capítulo 5, como líneas de trabajo a futuro.

Otro punto a remarcar, es que es posible obtener mejores cotas que la planteada en esta sección. En la Sección 6 del trabajo [Benaïm and Weibull, 2003] se analizan modelos del replicador con relojes *Poisson* y se esquematiza una demostración para hallar una cota exponencial en el tamaño de la población. En [Benaïm and Weibull, 2009] los autores extienden los resultados del trabajo [Benaïm and Weibull, 2003] a procesos en los cuales las tasas también dependen de los tamaños de poblaciones. Cabe mencionar que estos trabajos se centran principalmente en procesos de Markov de tiempo discreto, los análisis de tiempo continuo aparecen como secundarios.

3.2. Modelo Con Intervención Externa

En la presente sección se introduce una modificación al modelo de la Sección 3.1. Como indica el título de esta sección, la diferencia central es que en este modelo se asumirá que hay un regulador externo al mercado de trabajo que puede fijar incentivos e impuestos tanto a trabajadores como a firmas.

El objetivo del regulador central será el de lograr que firmas y trabajadores se formen e innoven respectivamente, con el fin de tener una economía desarrollada. En otras palabras buscará llevar a la economía lejos de la trampa de pobreza. Esto se logrará por medio de un préstamo externo a la economía, la implementación de incentivos mediante ese préstamo y una etapa de carga tributaria para poder pagar el préstamo inicial.

En las siguientes secciones, presentaremos el juego modificado con la presencia de incentivos e impuestos. En este nuevo juego las situaciones de economía incentivada y economía con carga tributaria serán temporarias y accesorias a poder, a largo plazo, dejar a la economía sin intervención externa. En resumen, el regulador central impondrá un juego incentivado, luego un juego con carga tributaria y eventualmente retirará sus acciones reguladoras.

También presentaremos la dinámica del replicador asociada a este juego. En vista de lo indicado en el párrafo anterior, la misma estará compuesta por tres comportamientos diferenciados. Para un primer intervalo de tiempo actuará la dinámica del juego con incentivos, para el segundo intervalo actuará la dinámica con carga tributaria y para el resto del tiempo regirá la dinámica sin intervención externa presentada en la Sección 3.1.

3.2.1. Juego En Forma Normal

3.2.1.1. Definición

Se define un juego que llamaremos $G^E = \{\mathcal{I}, \mathcal{S}, \pi^E\}$, donde el superíndice E indica que se está hablando del juego con intervención externa. El conjunto de jugadores (\mathcal{I}) coincide con el del juego G de la Sección 3.1.1.1, al igual que las estrategias de los mismos (\mathcal{S}). El juego de esta sección difiere del juego sin intervención externa en los retornos de los jugadores para estrategias puras (π^E).

Las descripciones las estrategias de los jugadores, $\{S, NS\}$ para los trabajadores W y $\{I, NI\}$ para las firmas F , puede encontrarse en detalle en la Sección 3.1.1.1.

Para la definición de los retornos de los jugadores para estrategias puras, usaremos los parámetros definidos en la Sección 3.1.1.1 y agregaremos algunos más que son propios de los incentivos y los impuestos. Estos nuevos parámetros son presentados a continuación.

1. Parámetros de un Trabajador Formado (S):

- m_W :
Es subsidio que percibe un trabajador formado, ya sea contratado por una firma innovadora (I) como por una firma no innovadora (NI).
- I_W :
Es el impuesto que percibe un trabajador formado, fuera contratado por una firma innovadora (I) o por una firma no innovadora (NI).

2. Parámetros de una Firma Innovadora (I):

- m_F :
Es subsidio que percibe una empresa innovadora, independiente del trabajador que vaya a contratar.
- I_F :
Es el impuesto que percibe una firma innovadora, independiente del trabajador que vaya a contratar.

De la misma manera que se hizo para el juego anterior, podemos definir los retornos de los jugadores para las estrategias puras, pero ahora tomando en cuenta los incentivos e impuestos.

De acuerdo con la convención del superíndice E para el juego con intervención externa, definimos los siguientes retornos para el juego G^E . Para los trabajadores: $\pi_W^E : S_W \times S_F \rightarrow \mathbb{R}$ y para las firmas: $\pi_F^E : S_W \times S_F \rightarrow \mathbb{R}$.

Retornos de Trabajadores:

$$\begin{aligned}\pi_W^E(S, I) &= \bar{s} + \bar{p} - CE + m_W - I_W \\ \pi_W^E(S, NI) &= \bar{s} - CE + m_W - I_W \\ \pi_W^E(NS, I) &= s + p \\ \pi_W^E(NS, NI) &= s\end{aligned}$$

Retornos de Firmas:

$$\begin{aligned}\pi_F^E(S, I) &= B_I(S) - (\bar{s} + \bar{p}) - CI + m_F - I_F \\ \pi_F^E(S, NI) &= B_{NI}(S) - \bar{s} \\ \pi_F^E(NS, I) &= B_I(NS) - (s + p) - CI + m_F - I_F \\ \pi_F^E(NS, NI) &= B_{NI}(NS) - s\end{aligned}$$

En base a los parámetros definidos, de la misma manera que se hizo en la Sección 3.1.1.1, se pueden plantear las Complementaridades Estratégicas. En el juego G^E mantendremos las mismas restricciones (3.1, 3.2, 3.3 y 3.4) en los parámetros que fueron planteadas para el juego G . Y agregaremos dos condiciones relacionadas a los incentivos, las cuales tienen una explicación intuitiva.

Las nuevas condiciones responden a que si se incentiva mucho la formación en los trabajadores y la innovación en las firmas, se puede pasar a una situación en la cual sea irracional hacer otra cosa que no sea formarse o innovar. Dicho en términos del juego G^E , podríamos pasar a tener un único equilibrio de Nash de estrategias puras compuesto por $\{S, I\}$. No nos interesa ese caso, ya que es claro que lograr esa situación requiere un incentivo demasiado intenso. Por el contrario nos interesan las situaciones en las cuales se apliquen incentivos mas leves. Las condiciones necesarias son:

$$m_W < s - \bar{s} + CE \quad (3.71)$$

$$m_F < B_{NI}(NS) - B_I(NS) + p + CI \quad (3.72)$$

Como ya se indicó anteriormente, estas dos condiciones tendrán un impacto directo sobre los equilibrios de Nash del juego.

3.2.1.2. Cálculo de Equilibrios de Nash

En la presente sección presentamos la deducción formal de los equilibrios de Nash del juego G^E . Primero buscaremos los equilibrios de Nash puros. Para ello se calculan las funciones mejores respuestas en estrategias puras: $\text{BR}_W(s_F)$ con $s_F \in S_F$ y $\text{BR}_F(s_W)$ con $s_W \in S_W$. Usando los retornos con intervención externa.

A partir de 3.1, 3.2 y 3.71, para los trabajadores se tiene:

$$\begin{aligned}\text{BR}_W(I) &= \{S\} \\ \text{BR}_W(NI) &= \{NS\}\end{aligned}$$

Mientras que, usando 3.3, 3.4 y 3.72, para las firmas se tiene:

$$\begin{aligned}\text{BR}_F(S) &= \{I\} \\ \text{BR}_F(NS) &= \{NI\}\end{aligned}$$

Usando las mejores respuestas para estrategias puras y la definición de equilibrio de Nash, concluimos que $\Theta_1^{NE} = \{S, I\}$ y $\Theta_2^{NE} = \{NS, NI\}$.

Se debe ahora hallar un equilibrio de Nash mixto. Nuevamente, se asumirá que los jugadores randomizan y por ende sus estrategias mixtas serán: $x = (x_S, 1 - x_S) \in \Delta_W$ y $y = (y_I, 1 - y_I) \in \Delta_F$.

Para hallar un equilibrio de Nash mixto se deberán calcular los retornos esperados de los jugadores, de acuerdo a la notación introducida en esta sección, identificaremos a los retornos con el superíndice E :

$$\begin{aligned}u_W^E(x, y) &= x_S [y_I \pi_W^E(S, I) + (1 - y_I) \pi_W^E(S, NI)] + \\ &\quad (1 - x_S) [y_I \pi_W^E(NS, I) + (1 - y_I) \pi_W^E(NS, NI)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_F^E(x, y) &= y_I [x_S \pi_F^E(S, I) + (1 - x_S) \pi_F^E(NS, I)] + \\ &\quad (1 - y_I) [x_S \pi_F^E(S, NI) + (1 - x_S) \pi_F^E(NS, NI)]\end{aligned}$$

Impondremos las igualdades que hacen a los jugadores indiferentes respecto de cambiar sus estrategias mixtas y por ende resultan en equilibrios de Nash mixtos.

$$u_W^E(e^S, y) = u_W^E(e^{NS}, y) \quad (3.73)$$

$$u_F^E(x, e^I) = u_F^E(x, e^{NI}) \quad (3.74)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones: 3.73 y 3.74, determinamos la siguiente expresión para el único equilibrio de Nash mixto del juego G^E , $\Theta_3^{NE} = \{x^{E*}, y^{E*}\}$.

$$x_S^{E*} = \frac{B_I(NS) - B_{NI}(NS) - p - CI + m_F - I_F}{B_I(NS) - B_I(S) + B_{NI}(S) - B_{NI}(NS) + \bar{p} - p} \quad (3.75)$$

$$y_I^{E*} = \frac{CE - \bar{s} + s - m_W + I_W}{\bar{p} - p} \quad (3.76)$$

Nuevamente, el equilibrio de Nash mixto hallado debe cumplir: $x_S^{E*} \in [0, 1]$ e $y_I^{E*} \in [0, 1]$, ya que las mismas son probabilidades. Esas verificaciones son análogas a las de la Sección 3.1.1.2 y usan las complementaridades estratégicas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 y también serán necesarias las restricciones en los incentivos introducidos en 3.2.1.1. Dichas verificaciones quedan a cargo del lector.

En resumen, para el modelo de competición de firmas y trabajadores con intervención externa, tenemos los siguientes equilibrios de Nash:

$$\Theta_1^{NE} = \{(1, 0), (1, 0)\} \quad (3.77)$$

$$\Theta_2^{NE} = \{(0, 1), (0, 1)\} \quad (3.78)$$

$$\Theta_3^{NE} = \{(x_S^{E*}, 1 - x_S^{E*}), (y_I^{E*}, 1 - y_I^{E*})\} \quad (3.79)$$

3.2.2. Proceso Estocástico del Replicador

En esta sección tenemos, al igual que en la Sección 3.1.2, dos poblaciones finitas de trabajadores y firmas que se comportan de acuerdo a un modelo de imitación de agentes exitosos. Referimos al lector a esa sección por el origen y base del modelo de imitación, así como por la definición del proceso estocástico resultante de dicho modelo.

Solamente es necesario en esta sección remarcar que el proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$ planteado en 3.1.2, con sus transiciones y respectivas tasas de transiciones, sigue siendo válido para el modelo de competición actual.

Por lo tanto, nos remitiremos a indicar que los nuevos retornos esperados que perciben los agentes nos obligan a actualizar las tasas de transiciones que se definieron en 3.23, 3.24, 3.25 y 3.25. Esto se debe a que tanto las tasas de revisión de estrategias así como las probabilidades de las comparaciones de retornos esperados percibidos, dependen de dichos retornos esperados.

En conclusión, corrigiendo los retornos esperados y manteniendo el resto de las definiciones de tasas y transiciones tenemos el nuevo proceso definido totalmente.

3.2.3. Dinámica del Replicador

A continuación, basándonos en lo expuesto en la Sección 3.1.3.1 plantearemos el sistema de EDOs del replicador para el modelo de competición entre Firmas y Trabajadores con intervención externa. La deducción del sistema de EDOs es completamente análoga a la realizada en 3.1.3.1, ya sea que se elija hallar el sistema por medio del balance de flujos o por el método del cálculo del *Drift*.

Por otro lado, para poder más adelante expresar el comportamiento dinámico del regulador externo de manera sencilla, introduciremos la siguiente definición de vector de parámetros de control del regulador externo (Φ). El mismo estará compuesto tanto por los incentivos (m_W, m_F), así como por los impuestos (I_W, I_F).

$$\Phi = \begin{pmatrix} m_W \\ m_F \\ I_W \\ I_F \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

Para que un vector de parámetros de control sea válido, el mismo deberá respetar las restricciones en los incentivos e impuestos 3.72 y 3.71. Es importante notar que la economía sin intervención externa (modelo de la Sección 3.1) corresponde a: $\Phi = 0$.

También es relevante notar que cualquier función que dependa del cálculo de alguno de los retornos esperados será una función paramétrica del vector Φ .

En lo que sigue, presentamos el sistema de EDOs del replicador con las dependencias de Φ de manera explícita. Como es usual, el superíndice E indica que se trata del modelo con intervención externa.

$$\mathcal{DR}^E \begin{cases} \dot{x}_S = x_S (1 - x_S) [r_{NS}(y, \Phi) (1 - f_W(y, \Phi)) - r_S(y, \Phi) f_W(y, \Phi)] \\ \dot{y}_I = y_I (1 - y_I) [r_{NI}(x, \Phi) (1 - f_F(x, \Phi)) - r_I(x, \Phi) f_F(x, \Phi)] \end{cases} \quad (3.81)$$

Representaremos el sistema de EDOs en notación vectorial, para lo cual haremos algunas definiciones. El vector de funciones incógnitas es $Z(t) \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$Z(t) = \begin{pmatrix} x_S(t) \\ y_I(t) \end{pmatrix}$$

El campo vectorial, paramétrico en Φ , de 3.81, es $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(Z(t), \Phi) = \begin{pmatrix} x_S (1 - x_S) [r_{NS}(y, \Phi) (1 - f_W(y, \Phi)) - r_S(y, \Phi) f_W(y, \Phi)] \\ y_I (1 - y_I) [r_{NI}(x, \Phi) (1 - f_F(x, \Phi)) - r_I(x, \Phi) f_F(x, \Phi)] \end{pmatrix}$$

Con lo cual, el sistema de EDOs 3.81 puede resumirse como:

$$\mathcal{DR}^E \begin{cases} \dot{Z}(t) = F(Z(t), \Phi) \\ Z(0) = Z_0 \end{cases} \quad (3.82)$$

Otro paso necesario para poder expresar el comportamiento del regulador externo es el de definir, para \mathcal{DR}^E , la cuenca de atracción del equilibrio de Nash correspondiente a que todos los trabajadores sean formados y todas las empresas sean innovadoras.

Antes definamos la familia de soluciones de la EDO 3.82, como $\xi(t, Z_0, \Phi)$ tal que $\forall Z_0 \in [0, 1]^2$ se cumplan:

$$\xi(0, Z_0, \Phi) = Z_0 \quad (3.83)$$

$$\frac{d}{dt} \xi(t, Z_0, \Phi) = F(\xi(t, Z_0, \Phi), \Phi) \quad (3.84)$$

Podemos ahora definir la cuenca de atracción del equilibrio de Nash que corresponde a las poblaciones: $x_S = 1, y_I = 1$.

Diremos que $A(\Phi) \subset [0, 1]^2$ es la cuenca de atracción de $Z_{S,I} = (1, 1)^T \in [0, 1]^2$ sii para todo $Z_0 \in A(\Phi)$ se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t, Z_0, \Phi) = Z_{S,I} \quad (3.85)$$

Habiendo definido los elementos anteriores, podemos a continuación enunciar las medidas que tomará el regulador externo a fin de garantizar que, para cualquier condición inicial, la economía converge al equilibrio pareto óptimo.

El esquema consiste en que el regulador central pedirá, en el tiempo $t = 0$, un préstamo a una institución exterior a la economía. A partir de $t = 0$ y usando el préstamo, incentivará a las firmas innovadoras y a los agentes formados de manera constante hasta un cierto tiempo t^i . Una vez alcanzado el tiempo t^i , el regulador central retirará los incentivos e impondrá a las firmas innovadoras y a los trabajadores formados impuestos constantes hasta otro tiempo t^{ii} , de manera de recuperar el préstamo pedido en el tiempo inicial. Una vez alcanzado el tiempo t^{ii} , y por ende recuperado el préstamo, se retira la intervención externa.

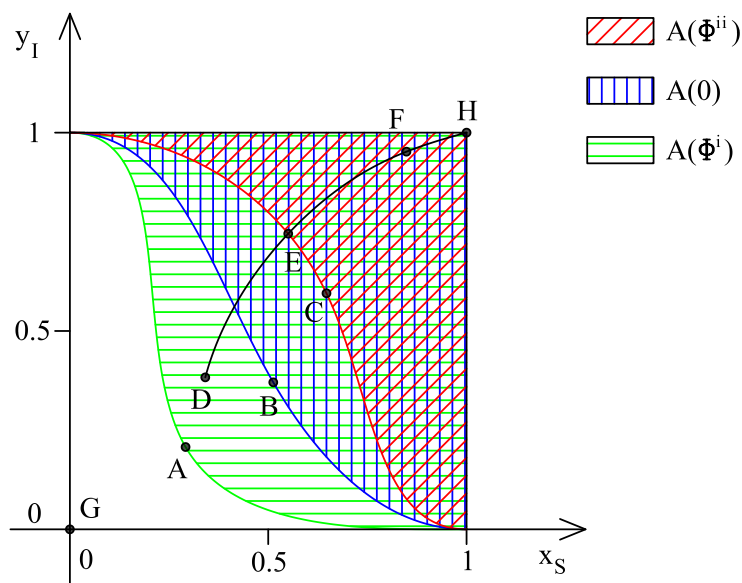


Figura 3.1 – Esquema de Trayectoria de la Dinámica con Intervención Externa

El regulador define los tiempos de intervención (t^i y t^{ii}) y sus parámetros de control en cada etapa (Φ^i, Φ^{ii}) de la siguiente manera:

1. Etapa de Subsidios:

En $t = 0$, ver Punto D en la figura 3.1, se elige $\Phi^i = (m_W^i, m_W^i, 0, 0)^T$ tal que: $Z_0 \in A(\Phi^i)$.

Observar que se pueden hallar m_W^i, m_F^i igualando el equilibrio de Nash mixto 3.75 a la condición inicial Z_0 .

2. Etapa de Impuestos:

El tiempo ($t^i \in \mathbb{R}^+$) en el cual se interrumpen los incentivos, ver punto E de la figura 3.1, se define como:

$$t^i = \inf_{t \geq 0} \{t \in \mathbb{R}^+ : \xi(t, Z_0, \Phi^i) \in A(\Phi^{ii})\} + \delta_t \quad (3.86)$$

El vector de parámetros de control para la etapa impositiva es: $\Phi^{ii} = (0, 0, I_W^{ii}, I_F^{ii})^T$. El regulador externo tiene libertad para elegir los impuestos a cobrar.

Será necesario definir también $\delta_t > 0$, el cual es un lapso de tiempo arbitrario que el regulador debe elegir para asegurar que la trayectoria de la EDO entra en la cuenca de atracción $A(\Phi^{ii})$.

3. Fin de la Intervención:

El tiempo ($t^{ii} \in \mathbb{R}^+$) en el cual se interrumpe la intervención de la economía, ver punto F de la figura 3.1, se define como:

$$t^{ii} \in \mathbb{R}^+ : \int_{t^i}^{t^{ii}} I_W^{ii} x_S + \eta I_F^{ii} y_I dt = \int_0^{t^i} m_W^i x_S + \eta m_F^i y_I dt \quad (3.87)$$

La ecuación anterior se deduce de suponer que se debe igualar la recaudación de impuestos al préstamo inicial necesario. En este razonamiento estamos simplificando el cálculo económico, al ignorar el interés que se genera por el tiempo transcurrido entre el préstamo inicial y el momento en que se recauda el capital para saldar la deuda del préstamo. En esa hipótesis simplificada, la deducción es la siguiente:

$$\text{Préstamo}(t^{ii}) = \text{Recaudación}(t^{ii}) \quad (3.88)$$

$$\int_0^{t^i} N_W x_S m_W^i + N_F y_I m_F^i dt = \int_{t^i}^{t^{ii}} N_W x_S I_W^{ii} + N_F y_I I_F^{ii} dt \quad (3.89)$$

$$\int_0^{t^i} m_W^i x_S + \eta m_F^i y_I dt = \int_{t^i}^{t^{ii}} I_W^{ii} x_S + \eta I_F^{ii} y_I dt \quad (3.90)$$

Resumiendo, los parámetros de control del regulador central para las tres etapas son:

$$\Phi(t) = \begin{cases} \Phi^i & \text{si, } t \in [0, t^i) \\ \Phi^{ii} & \text{si, } t \in [t^i, t^{ii}) \\ 0 & \text{si, } t \geq t^{ii} \end{cases} \quad (3.91)$$

Finalmente, la EDO 3.82 y la función de control 3.91 dan la dinámica completa para el modelo de competición entre firmas y trabajadores con intervención externa. En el Capítulo 4 se presentarán soluciones de esta dinámica para ciertos parámetros económicos dados.

Capítulo 4

SIMULACIONES Y RESULTADOS NUMÉRICOS

En el este capítulo se presentan resultados numéricos de la evolución de las poblaciones para los modelos de competición con y sin intervención externa expuestos en el Capítulo 3.

En la Sección 4.1 se introducen las herramientas usadas para obtener las simulaciones y los resultados numéricos de esta tesis. Se hará referencia a los métodos numéricos utilizados, así como a detalles particulares de implementación de los mismos, tanto de programación así como del hardware utilizado. Vale remarcar que se programaron la totalidad de los métodos utilizados para obtener los resultados aquí presentados.

Por último, en las secciones 4.2 y 4.3 se presentan en sí mismos los resultados obtenidos de implementar y aplicar métodos numéricos a los modelos del Capítulo 3. En particular, se simulan realizaciones de los procesos estocásticos de evolución de poblaciones y se hallan soluciones de las EDOs determinísticas del replicador.

4.1. Descripción de Métodos Numéricos

En esta sección se describen los distintos componentes que permiten hallar las soluciones de los sistemas de EDOs y a su vez también obtener trazas de los procesos estocásticos.

En primer lugar, en 4.1.1 se presenta el método elegido para la resolución de las EDOs. En esa sección se explica cómo se utiliza el método y se presentan sus características principales, en cuanto a precisión, estabilidad y eficiencia.

Luego, en la Sección 4.1.2 se describen los principales aspectos de cómo fueron implementadas las soluciones que se presentan. Se hace particular énfasis en el cálculo de las cuencas de atracción ya que este problema es el más demandante del punto de vista computacional; y para resolverlo fue necesaria una implementación más cuidadosa a fin de obtener soluciones en tiempos razonables.

4.1.1. Método Runge-Kutta para EDOs

4.1.1.1. Definición y Propiedades

A continuación presentamos el método numérico Dormand-Prince (D-P) el cual pertenece a la familia de métodos Runge-Kutta (R-K). Este fue el elegido para resolver los sistemas de EDOs que se presentaron en los modelos del Capítulo 3. La elección del método fue basada en los criterios de precisión, eficiencia y estabilidad. Todos estos aspectos del método son tratados en esta sección.

Este método numérico es capaz de resolver de forma aproximada un sistema de EDOs de primer orden de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) &= F(Y(t)) \\ Y(0) &= Y_0\end{aligned}\tag{4.1}$$

Con $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ y $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Los casos de EDOs no autónomas, siendo estas en las cuales tenemos $F(Y(t), t)$, se pueden reducir a casos autónomos simplemente agregando una variable extra al vector Y definida como igual a t .

Será útil recordar que la familia de soluciones exactas de la EDO 4.1 se define como la función: $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que verifica dado $Y \in A \subset \mathbb{R}^n$:

$$\varphi(0, Y) = Y\tag{4.2}$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, Y) = F(\varphi(t, Y))\tag{4.3}$$

Con lo cual, la solución de 4.1 para la condición inicial dada será: $Y(t) = \varphi(t, Y_0)$.

Los métodos numéricos utilizados para hallar una solución aproximada de un EDO generan, para una sucesión de tiempos $\{t_k\}_{k=0, \dots, N}$ una sucesión de puntos $\{Y_k\}_{k=0, \dots, N}$. Para que el método sea de interés, uno espera que $Y(t_k) \simeq Y_k$. En general, el punto Y_{k+1} se determina mediante una expresión como la siguiente:

$$Y_{k+1} = Y_k + h_k \Phi(Y_{k+1}, h_k, Y_k, t_k, Y_{k-1}, t_{k-1}, \dots, Y_{k-p+1}, t_{k-p+1})\tag{4.4}$$

Donde $h_k = t_{k+1} - t_k$ es el largo del paso en la variable independiente (t) a tomar. Mientras que, de manera evidente, el producto $h_k \Phi(\cdot)$ corresponde al avance de la solución del punto k al $k + 1$. Si un método requiere de manera explícita para avanzar a Y_{k+1} los valores de Y_{k-p+1} hasta Y_k , diremos que el método es multi-paso o equivalentemente de p pasos. En base a este criterio, el método D-P clasifica como un método de paso simple ($p = 1$), en efecto toda la familia R-K es de paso simple.

Otra característica del método de D-P es que es un método explícito. Eso significa que $\Phi(\cdot)$ no depende de Y_{k+1} . Con lo cual podemos encontrar una formula explícita que permite calcular Y_{k+1} en función de Y_k . Por el contrario, en los métodos implícitos Y_{k+1} queda definido mediante una ecuación implícita. Por lo general esto obliga a resolver en cada paso un sistema de ecuaciones no lineales para hallar Y_{k+1} . A partir de este último comentario resulta evidente que los métodos explícitos tendrán en general un paso más económico que los implícitos.

Los métodos R-K explícitos se clasifican dependiendo de su cantidad de etapas. Las etapas refieren a la cantidad de veces por paso que se debe evaluar a la función $F(\cdot)$ de la EDO. Hay varios teoremas conocidos como barreras de orden, que relacionan el número de etapas con la precisión del método (ver [Butcher, 2003]). Como es de suponer con un mayor número de etapas se puede obtener una mayor precisión, pero esto implica un mayor costo ya que habrá que evaluar una mayor cantidad de veces la función $F(\cdot)$.

Continuando con las clasificaciones de los métodos R-K, diremos que dos métodos R-K son embebidos si ambos tienen la misma cantidad de etapas y en cada etapa evalúan $F(\cdot)$ en los mismos puntos. Por lo tanto, podemos afirmar que D-P está compuesto por dos métodos embebidos, uno de menor precisión y otro de mayor precisión. Uno se usará para avanzar y el otro servirá para estimar el error cometido al avanzar y así poder ajustar el largo de los pasos h_k .

A continuación daremos la forma de evaluar el paso del método D-P. Para ello, debemos indicar que la manera estándar de definir el paso de un método R-K es mediante la tabla de Butcher. Para un método R-K explícito y de $s \in \mathbb{N}$ etapas la tabla de Butcher se compone de una matriz $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^{s \times s}$ triangular inferior estricta, un vector columna $c \in \mathbb{R}^s$ y otro vector columna $b \in \mathbb{R}^s$.

$$\frac{c \mid A}{\mid b^T}$$

A partir de las entradas de la tabla, para un paso temporal de largo $h_k \in \mathbb{R}^+$, la aproximación Y_{k+1} mediante el método R-K se calcula como:

$$Y_{k+1} = Y_k + \sum_{i=1}^s b_i K_i \quad (4.5)$$

Donde:

$$K_1 = h_k F(Y_k) \quad (4.6)$$

$$K_i = h_k F\left(Y_k + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j\right) \text{ con, } i = 2, \dots, s \quad (4.7)$$

Presentamos en el Cuadro 4.1 la tabla de Butcher para el Método de Dormand-Prince. Esta se obtuvo del libro [Butcher, 2003].

El lector puede observar que en la tabla de Butcher para D-P se agregan otras dos filas por debajo de la fila correspondiente a b^T . La primera de éstas corresponde al vector \tilde{b}^T que define al segundo método embebido. Mientras que la última fila contiene el vector $d^T = \tilde{b}^T - b^T$.

Para comprender la importancia de d^T , resulta importante definir el Error Local (δ_k), cometido en el paso k por un método numérico de resolución de EDOs.

$$\delta_{k+1} = Y_{k+1} - \varphi(t_{k+1}, Y_k)$$

0							
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$
	$-\frac{71}{57600}$	0	$\frac{71}{16695}$	$-\frac{71}{1920}$	$\frac{17253}{339200}$	$-\frac{22}{525}$	$\frac{1}{40}$

Cuadro 4.1 – Tabla de Butcher para el Método Dormand-Prince

El error local del método embebido menos preciso se puede estimar usando al método de mayor precisión como aproximación de la solución exacta. Llamaremos $\hat{\delta}_k$ a la estimación del error local, con lo cual usando la definición genérica del paso R-K dada en 4.5 podemos plantear lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \hat{\delta}_{k+1} &= \tilde{Y}_{k+1} - Y_{k+1} \\
 &= Y_k + \sum_{i=1}^s \tilde{b}_i K_i - Y_k - \sum_{i=1}^s b_i K_i \\
 &= \sum_{i=1}^s (\tilde{b}_i - b_i) K_i \\
 &= \sum_{i=1}^s d_i K_i
 \end{aligned}$$

Con lo cual, el vector d^T nos permite calcular directamente una estimación del error local del método menos preciso.

$$\hat{\delta}_{k+1} = \sum_{i=1}^s d_i K_i \quad (4.8)$$

Calcular la estimación usando directamente 4.8 en vez de restar las dos aproximaciones de D-P tiene como ventaja un menor error de aritmética en punto flotante.

Por último nos centraremos en otra importante propiedad del método D-P, relacionada a su eficiencia. A pesar que D-P tiene por definición 7 etapas, el hecho que la última fila de A y el vector b^T sean iguales hace que solo hayan 6 etapas efectivas por paso. Esta propiedad se llama *FSAL* (del inglés: *First Same As Last*). A continuación verificaremos que la última etapa del

paso actual es igual a la primera etapa del paso siguiente. Con lo cual basta con guardarla en una variable auxiliar y se evita un cálculo redundante de $F(\cdot)$ en cada paso.

Paso k , Etapa s :

$$K_s^{(k)} = h_k F\left(Y_k + \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} K_j^{(k)}\right) \quad (4.9)$$

Y ahora usando que $a_{sj} = b_j$, con $j = 1, \dots, s$:

Paso $k+1$, Etapa 1:

$$K_1^{(k+1)} = h_k F(Y_{k+1}) \quad (4.10)$$

$$= h_k F\left(Y_k + \sum_{j=1}^s b_j K_j^{(k)}\right) \quad (4.11)$$

$$= h_k F\left(Y_k + \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} K_j^{(k)}\right) \quad (4.12)$$

$$= K_s^{(k)} \quad (4.13)$$

4.1.1.2. Esquema de Paso Adaptativo

Ahora que hemos definido el método de D-P, debemos definir la manera en que se realizará la adaptación del paso. Para lo cual debemos conocer los errores locales de los métodos embebidos.

El primer método, definido por b^T y con el cual avanzará el método D-P, tiene orden de error local igual a 6 ($\delta_k = O(h_k^6)$). Mientras que segundo método embebido, definido por \tilde{b}^T y que será usado sólo para estimar el error, tiene orden de error local igual a 5 ($\delta_k = O(h_k^5)$). La deducción de estos ordenes se puede encontrar en [Dormand and Prince, 1980].

El procedimiento de avanzar con el método de mayor orden se llama extrapolación local y se reconoce en general que con este procedimiento se obtienen resultados de mayor precisión, ver por ejemplo [Hairer et al., 2011].

El procedimiento para adaptar el paso consiste en imponer que la estimación del error local ($\tilde{\delta}_k$) se mantenga próxima a una cierta tolerancia arbitraria ($tol > 0$). Bajo ciertas hipótesis, dada una cantidad fija N de pasos a tomar, mantener el error local constante minimiza el error al final de los N pasos. Llamaremos \bar{h}_k al paso que resulta de adaptar el paso h_k . A partir de lo expuesto y la expresión 4.8, dado h_k suficientemente pequeño tendremos con $c_k \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{\delta}_{k+1} \simeq c_k h_k^5 \quad (4.14)$$

Imponiendo la limitación en el error local:

$$tol = c_k \bar{h}_k^5 \quad (4.15)$$

Con lo cual se llega a la siguiente fórmula de adaptación de paso:

$$\bar{h}_k = h_k \sqrt[5]{\frac{tol}{\tilde{\delta}_{k+1}}} \quad (4.16)$$

Esta fórmula para el paso adaptado se suele multiplicar por un factor menor a uno de manera de tener seguridad que se esta alcanzando el error local buscado o uno menor. El factor de seguridad elegido para este trabajo fue 0,9. Por otro lado, con el fin de disminuir variaciones bruscas del largo del paso, se limita también el factor $\frac{\bar{h}_k}{h_k}$ tal que: $0,1 < \frac{\bar{h}_k}{h_k} < 10$.

Para fijar ideas, en la Figura 4.1 se presenta un ejemplo de solución con D-P y paso adaptativo de la EDO: $\dot{y}(t) = \frac{y(t)+t}{y(t)-t}$, con $y(-2) = 1$.

En la figura, numerando de izquierda a derecha y de arriba a abajo, la primer gráfica presenta la solución aproximada para cada t_k . La segunda gráfica muestra el paso h_k en función de los tiempos t_k . Mientras que la tercer gráfica presenta la estimación del error local $\tilde{\delta}_{k+1}$ para cada tiempo, habiéndose elegido $tol = 10^{-10}$. Por último se muestra el error global o absoluto entre la solución exacta y la aproximación numérica. Se puede observar que el método concentra pasos más cortos en zonas de mayor curvatura y que logra mantener el error local por debajo del límite elegido.

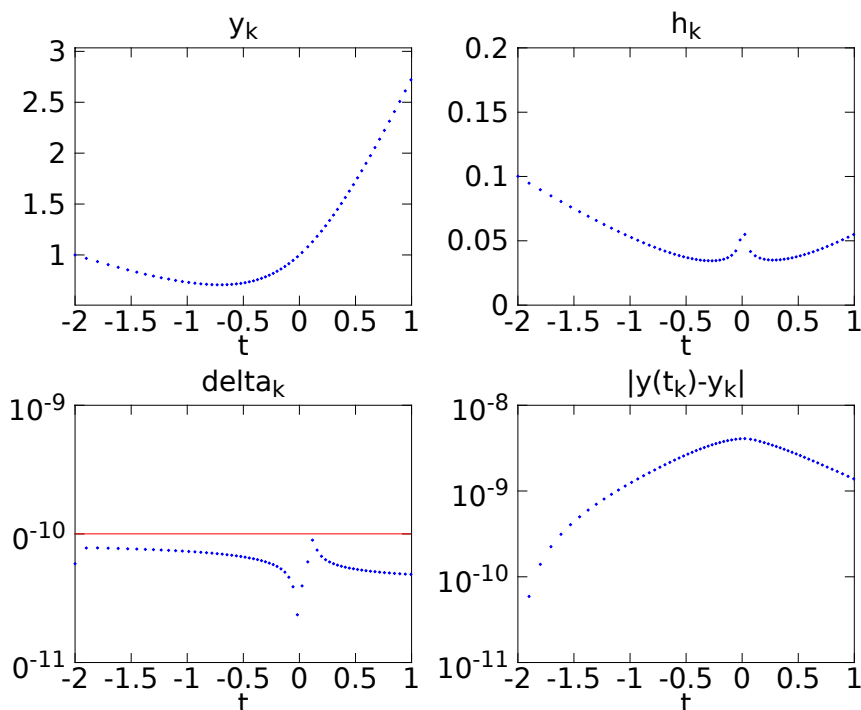


Figura 4.1 – Ejemplo de Solución con D-P y Paso Adaptativo

4.1.1.3. Control de Estabilidad

A continuación nos referimos a la estabilidad del Método de D-P y a un control de estabilidad que se puede implementar a partir de resultados teóricos.

Antes de comenzar recordaremos la definición de región de estabilidad lineal (Λ) de un método numérico para la solución de EDOs.

Dado el problema test, con $q \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= q y(t) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Y un método de paso constante igual a h , tal que con $z = hq$ este verifique:

$$y_{k+1} = R(z)y_k \quad (4.17)$$

Entonces $\Lambda \subset \{c \in \mathbb{C} : \Re(c) < 0\}$ es la región de estabilidad del método sii $\forall z \in \Lambda$ se cumple $|R(z)| < 1$.

La función $R(z)$ se llama función de estabilidad. Y en el trabajo [Dormand and Prince, 1980] se presenta la deducción de la función de estabilidad para el método utilizado en la presente tesis. En la referencia, el método figura con el nombre: *RK5(4)7M*. Su función de estabilidad es:

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{600}$$

La región de estabilidad no puede ser acotada ya que $R(z)$ tiene forma polinómica. En particular, en la Figura 4.2 se presenta una gráfica de la región de estabilidad Λ . Dentro de la región, se muestran curvas de nivel de la función $|R(z)|$.

Tal como indican tanto los autores del método D-P en [Dormand and Prince, 1980], así como Butcher en [Butcher, 2003], los métodos R-K de orden alto son métodos idóneos para EDOs no rígidas. Este es el caso de las ecuaciones diferenciales que están planteadas en el Capítulo 3. Esto fue verificado mediante un mecanismo de control de estabilidad que se incorpora a la implementación de D-P. La motivación de este mecanismo, la cual se describe a continuación, esta basada en el libro [Hairer and Wanner, 2004].

En primer lugar, tomemos dos soluciones de la EDO 4.1: $Y(t)$ y $\Psi(t)$. Mediante un desarrollo de Taylor, linealizamos $F(Y(t))$ en torno a $\Psi(t)$.

$$F(Y(t)) = F(\Psi(t)) + J_F(\Psi(t)) (Y(t) - \Psi(t)) + O(\|Y(t) - \Psi(t)\|^2) \quad (4.18)$$

Usando que que las funciones son soluciones de la EDO, descartando el termino de segundo orden e introduciendo una nueva variable $\bar{Y}(t) = Y(t) - \Psi(t)$ tenemos:

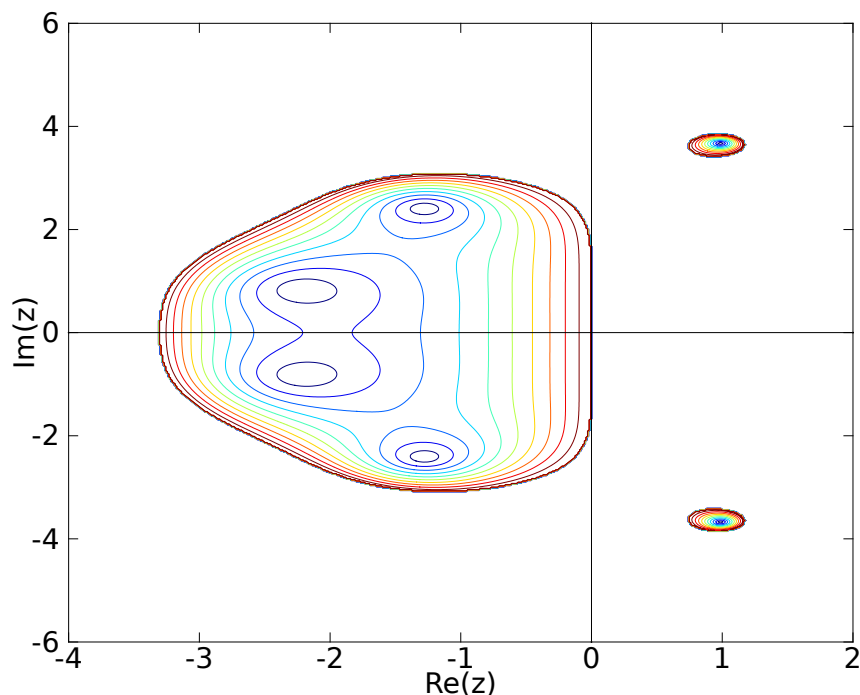


Figura 4.2 – Región de Estabilidad de Dormand-Prince

$$\dot{Y}(t) - \dot{\Psi}(t) = J_F(\Psi(t)) (Y(t) - \Psi(t)) \quad (4.19)$$

$$\dot{\hat{Y}}(t) = J_F(\Psi(t)) \bar{Y}(t) \quad (4.20)$$

Ahora, la matriz Jacobiana se dejará constante en el tiempo, refiriéndola a un tiempo t_k . La llamaremos simplemente como $J = J_F(\Psi(t_k))$. A partir de la hipótesis anterior, la aproximación por Taylor solamente tendrá validez si $t \simeq t_k$. Dado lo anterior tenemos:

$$\dot{\hat{Y}}(t) = J \bar{Y}(t) \quad (4.21)$$

El siguiente paso consiste en asumir que la matriz J es diagonalizable. Con lo cual se puede escribir $J = P D P^{-1}$, con P la matriz de vectores propios de J y D una matriz diagonal con los valores propios (en principio complejos) de J . Definiremos un último cambio de variable igual a: $\hat{Y}(t) = P^{-1} \bar{Y}(t)$ para transformar la EDO de la siguiente manera.

$$\dot{\hat{Y}}(t) = P D P^{-1} \bar{Y}(t) \quad (4.22)$$

$$P^{-1} \dot{\hat{Y}}(t) = D P^{-1} \bar{Y}(t) \quad (4.23)$$

$$\dot{\hat{Y}}(t) = D \hat{Y}(t) \quad (4.24)$$

Donde cada ecuación escalar de la igualdad vectorial 4.24 es un problema test. Llamaremos $\lambda_i^{(k)}$ a los valores propios de $J_F(Y_k)$, la matriz Jacobiana de la EDO evaluada en el paso actual.

Por lo tanto, el criterio de estabilidad, con $z_i^{(k)} = \lambda_i^{(k)} h_k$ será:

Para todo $z_i^{(k)}$ tal que $\Re(z_i^{(k)}) < 0$ se debe verificar que: $|R(z_i^{(k)})| < 1$.

Para las EDOs de las secciones 4.2 y 4.3 se calcularon exactamente los $\lambda_i^{(k)}$. Este cálculo es viable dada la baja dimensión del problema y el mismo se encuentra en el apéndice D. Para problemas con dimensiones altas, en los cuales determinar los valores propios es demasiado costoso, hay aproximaciones económicas para el módulo del valor propio dominante de J_F , ver por ejemplo [Hairer and Wanner, 2004].

4.1.1.4. Algoritmo de Paso Adaptativo y Estable de Dormand-Prince

En esta sección se presenta en forma de pseudocódigo (ver Algoritmo 4.1.1) el procedimiento que calcula el paso de D-P, incorporando lo expuesto en las secciones anteriores.

Para poder ejecutar el paso de D-P, debemos dar su matriz de coeficientes A y su vector b^T . Se debe proporcionar la función $F(\cdot)$ que define la EDO y su matriz Jacobiana $J_F(\cdot)$. También se debe conocer el paso actual $(k, X_k, t_k, h_k, K_7^{(k-1)})$. Además debemos fijar la tolerancia (tol) del error local del paso.

Los resultados del paso iterativo de D-P pueden ser dos. Una opción es que el método acepte el paso h_k y avance. La alternativa es que rechace el paso h_k por exceso de error y se repite el paso con un nuevo h_k . Por otro lado, en caso de haber señales de inestabilidad el método emite una alerta.

4.1.2. Implementación

Todas las soluciones y simulaciones numéricas que se presentan en esta tesis fueron realizadas en base a códigos ejecutados en `Octave` programados por quien escribe. El propósito de lo anterior fue por un lado didáctico, para profundizar en el área de Métodos Numéricos y por otro lado se buscó tener herramientas flexibles que permitieran resolver los problemas planteados sin quedar restringidos por los códigos usados.

En esta sección nos referimos a algunos detalles de implementación de las soluciones de los sistemas de EDOs. En particular describiremos la implementación del cálculo de las cuencas de atracción, ya que este resultó ser el problema más demandante del punto de vista computacional.

En primer lugar se procede a describir el servidor de cálculo **carlitosgardel**, dada la influencia que tuvo el mismo en los tiempos de cálculo de las cuencas de atracción. Dicho servidor esta al servicio del Laboratorio de Probabilidad y Estadística (LPE) del Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), dentro de la Facultad de Ingeniería (FING) de UdelAR. El servidor es administrado por la Unidad de Recursos Informáticos (URI) de FING.

Algorithm 4.1.1 Paso Iterativo de Dormand-Prince Adaptativo con Control de Estabilidad

```

procedure DORMANDPRINCE( $A, b^T, F(\cdot), J_F(\cdot), k, X_k, t_k, h_k, K_7^{(k-1)}, tol$ )

  %% Control de Estabilidad del Paso:
   $J_k := J_F(X_k)$ 
   $\lambda_k$  ▷ Valor Propio de  $J_k$  con parte real más negativa
  if  $|R(\lambda_k h_k)| > 1$  then
    Atención Paso Inestable! El problema se comporta de forma rígida.
  else
    El Paso es Estable.
  end if

  %% Cálculo de Adaptación del Paso:
   $K_1^{(k)} := K_7^{(k-1)}$  ▷ Aprovecha la Propiedad FSAL
  for  $i = 2 : 7$  do
     $K_i^{(k)} := h_k F(X_k + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j^{(k)})$ 
  end for
   $\tilde{\delta}_{k+1} := \sum_{i=1}^s d_i K_i^{(k)}$ 
   $\bar{h}_k := h_k \max\left(0.1, \min\left(10, 0.9 \sqrt[5]{\frac{tol}{\tilde{\delta}_{k+1}}}\right)\right)$ 

  %% Aceptación o Rechazo del Paso:
  if  $\tilde{\delta}_{k+1} < tol$  then
     $X_{k+1} := X_k + \sum_{i=1}^s b_i K_i^{(k)}$ 
     $t_{k+1} := t_k + h_k$ 
     $h_{k+1} := \bar{h}_k$ 
     $k = k + 1$ 
  else
     $h_k := \bar{h}_k$ 
  end if
end procedure

```

Especificaciones Técnicas del Servidor **carlitosgardel**:

- **Servidor:** HP ProLiant DL385 G7
- **Procesadores:** 2 AMD Opteron 6172 de 12 núcleos de 2100 MHz (Total 24 núcleos)
- **Memoria RAM:** 9 Dimm de 8Gb 1333Mhz (Total 72 Gb)
- **Disco Duro:** SATA de 250Gb
- **Sistema Operativo:** CentOS 6.2 64bits
- **Kernel:** 2.6.32-220.13.1.el6.x86_64
- **Software Cálculo Científico:** Octave 3.4.2

Ahora se describirá el procedimiento ideado para lograr que los cálculos de las cuencas de atracción realizados en `Octave` aprovecharan en el mayor porcentaje posible la capacidad de cálculo del servidor **carlitosgardel**. Dos características claves para la solución fueron que el sistema de EDOs era solamente de dimensión 2 y que conocíamos sus puntos asintóticamente estables. Dados los puntos anteriores, resulta viable generar una grilla $\Gamma \subset [0, 1]^2$ de condiciones iniciales y determinar si la solución que parte de cada una de ellas converge a uno de los puntos asintóticamente estables. Sabiendo cuáles condiciones iniciales convergen a cuáles equilibrios estables, conocemos una aproximación de las cuencas de atracción de los equilibrios estables.

A partir del esquema mencionado en el párrafo anterior y dado que el programa de cálculo científico `Octave` no tiene capacidad nativa para aprovechar los 24 núcleos del servidor **carlitosgardel**, surgió el problema de cómo implementar el cálculo de las cuencas de atracción de manera de utilizar el servidor al máximo de su capacidad. Cabe mencionar que se investigaron las funciones propias de `Octave` para el cálculo en paralelo y solo se encontró la función `parcellfun`, la cual no se adaptaba a las necesidades de nuestro problema.

La respuesta fue plantear un esquema de cálculo en paralelo de los puntos de la grilla. La grilla Γ tiene N^2 puntos equi-espaciados en las dos dimensiones (x_S e y_S). Esta grilla Γ se sub-dividió en una cuadrícula de n_p por n_p (con $N/n_p \in \mathbb{N}$). Esto generó n_p^2 sub-problemas y fueron estos los que se resolvieron en paralelo. Cada sub-problema que conforma la cuadrícula está identificado por dos índices, uno de fila y otro de columna $i, j \in \{1, 2, \dots, n_p\}$. Cada sub-problema se resuelve en un proceso de `Octave` independiente, el cual corre de fondo hasta que se resuelven todas las condiciones iniciales que contiene ese sub-problema. Antes de cerrarse el proceso de `Octave`, este controla si todos los otros subproblemas han terminado. Aquél que termina último unifica los resultados que guardaron los n_p^2 sub-problemas y da la solución completa de la grilla Γ .

El sistema operativo instalado en **carlitosgardel** puede distribuir la capacidad de trabajo de cualquiera de los núcleos entre un grupo de procesos de `Octave`. Esto hace que sea viable generar más procesos que núcleos y que cada núcleo atienda a varios subproblemas a la vez. A continuación presentamos algunos resultados que muestran la efectividad de este esquema de cálculo.

En la Figura 4.3 se puede comprobar como disminuye el tiempo de cálculo de las cuencas de atracción a medida que se aumenta el parámetro n_p . Se puede ver una rápida disminución del tiempo de cálculo para el intervalo $n_p^2 < 24$ (dado que el servidor tiene 24 núcleos) y luego disminuye más lentamente para $n_p^2 \geq 24$.

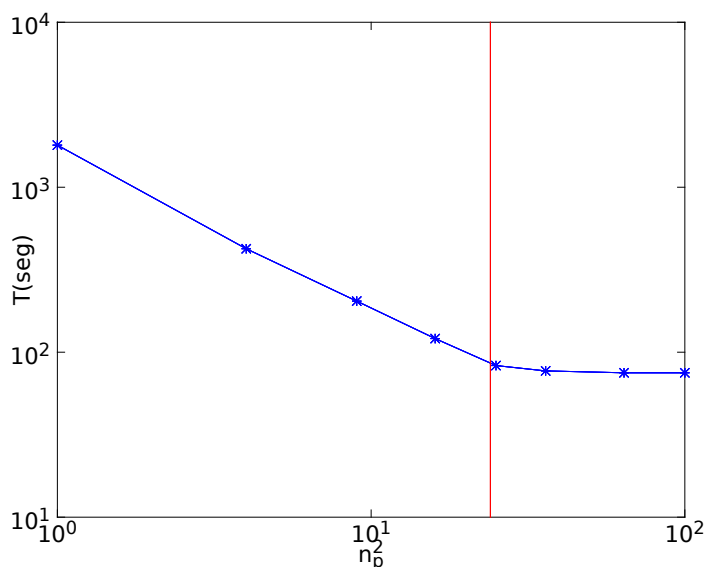


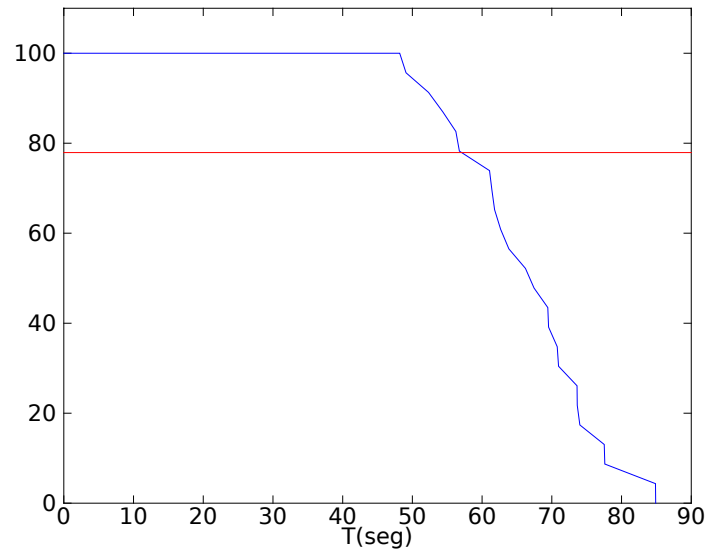
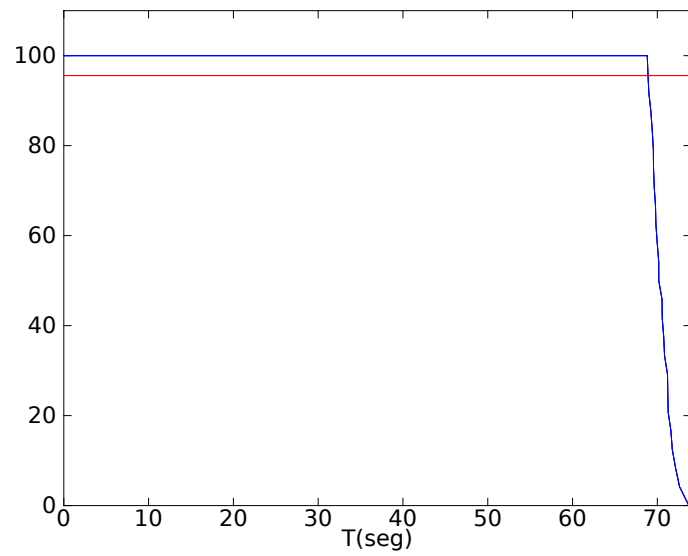
Figura 4.3 – Tiempo de Cálculo de Cuenca de Atracción en función de n_p

La disminución rápida en el primer intervalo esta asociada a que al aumentar n_p en ese intervalo se utilizan cada vez núcleos que estaban anteriormente vacantes.

La disminución lenta en el segundo intervalo responde a que los sub-problemas no tienen la misma carga computacional. Eso hace que algunos demoren más que otros y si, por ejemplo, se toman igual cantidad de sub-problemas que de núcleos entonces el sub-problema con más carga determina el tiempo total de cálculo. Por lo tanto si se generan más procesos que núcleos se mantiene más tiempo un porcentaje alto de núcleos trabajando a toda su capacidad, lo cual redundará en un menor tiempo total de cálculo.

En la Figura 4.4 se presenta una gráfica del porcentaje de utilización total de los núcleos del servidor para el cálculo de una grilla ($N = 120$) de una cuenca de atracción con $n_p = 5$ (25 procesos para 24 núcleos). Se indica con una línea horizontal roja el porcentaje promedio de utilización que es de 77.9%. Se puede observar claramente como aproximadamente a partir de los 50 segundos terminan de correr varios sub-problemas y en consecuencia los núcleos liberados van quedando vacantes. Esta disminución de utilización de los núcleos ocurre progresivamente durante prácticamente 40 segundos hasta que finaliza el cálculo.

En la Figura 4.5 se muestra el mismo problema pero ahora con $n_p = 10$ (100 procesos para 24 núcleos). Se indica nuevamente con una línea horizontal roja el valor de porcentaje promedio de utilización de los núcleos, el cual ahora es de 95.6%. Se puede ver como se mantienen hasta casi el final todos los núcleos en actividad, los núcleos recién se liberan a partir de los 70 segundos y el cálculo termina a los 80 segundos aproximadamente.

Figura 4.4 – Porcentaje de Utilización de Núcleos en Función de t , $n_p = 5$ Figura 4.5 – Porcentaje de Utilización de Núcleos en Función de t , $n_p = 10$

4.2. Modelo Sin Intervención Externa

En esta sección presentaremos simulaciones del proceso estocástico correspondiente a la dinámica de poblaciones dada en la Sección 3.1.2. El objetivo es visualizar para una variedad de tamaños de poblaciones la calidad de la aproximación que se obtiene mediante la dinámica determinística.

También presentaremos soluciones de la dinámica determinística para distintas condiciones iniciales, con comportamientos de convergencia al equilibrio pareto óptimo (S, I) y de convergencia a la trampa de pobreza (NS, NI).

Finalmente calcularemos las cuencas de atracción para la dinámica determinística del modelo en cuestión.

4.2.1. Elección de Parámetros

En primer lugar debemos presentar los parámetros económicos elegidos para las simulaciones. Luego debemos verificar que estos cumplen todas las desigualdades dadas en las Complementaridades Estratégicas, así como las dadas en las definiciones de las tasas de revisión de estrategias.

Los valores elegidos se presentan en el Cuadro 4.2. Estos fueron elegidos de tal forma que cumplieran todas las condiciones del modelo, pero no representan datos reales. Respecto de este punto, referimos al lector al Capítulo 5, a la sección de líneas de investigación a futuro.

Parámetro	Valor
α^W	1.50
β^W	0.50
σ^W	0.10
\bar{s}	2.00
\bar{p}	1.00
CE	0.50
s	1.60
p	0.75
α^F	1.00
β^F	0.40
σ^F	0.05
$B_I(S)$	4.50
$B_I(NS)$	3.00
CI	0.40
$B_{NI}(S)$	3.00
$B_{NI}(NS)$	2.00

Cuadro 4.2 – Valores de Parámetros Económicos y Dinámicos del Modelo

En cuanto a las verificaciones de las desigualdades, las referidas a las complementariedades estratégicas se presentan en el Cuadro 4.3. En la primera columna del cuadro se encuentra la referencia de la inecuación que se va a verificar y en la segunda columna el valor numérico de dicha inecuación para los parámetros dados.

Referencia	Valor
(3.1)	$2.50 > 2.35$
(3.2)	$1.60 > 1.50$
(3.3)	$3.10 > 3.00$
(3.4)	$2.00 > 1.85$
(3.5)	$1.10 > 0.40$

Cuadro 4.3 – Verificación de Complementaridades Estratégicas

Por último, se debe verificar que la elección de parámetros es tal que las tasas de revisión de los agentes (r_S , r_{NS} , r_I y r_{NI}) nunca sean negativas. Esas verificaciones corresponden a las desigualdades 3.31 y 3.32. Para verificar estas condiciones usaremos que, a partir que $u_W(x, y)$ e $u_F(x, y)$ son combinaciones convexas de los retornos para estrategias puras, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\max_{(x,y) \in [0,1]^2} u_W(x, y) = \max_{(s_W, s_F) \in S_W \times S_F} \pi_W(s_W, s_F) \quad (4.25)$$

$$\max_{(x,y) \in [0,1]^2} u_F(x, y) = \max_{(s_W, s_F) \in S_W \times S_F} \pi_F(s_W, s_F) \quad (4.26)$$

Dado lo anterior, las verificaciones de tasas de revisión mayores o igual a cero se presentan en el Cuadro 4.4. Nuevamente, en la primer columna se indica la referencia a la inecuación a verificar y en la segunda su valor numérico para los parámetros dados.

Referencia	Valor
(3.31)	$3.00 \geq 2.50$
(3.32)	$2.50 \geq 1.10$

Cuadro 4.4 – Verificación de Tasas de Revisión Positivas

4.2.2. Simulaciones del Proceso Estocástico

En esta sección presentamos simulaciones del proceso estocástico definido en la Sección 3.1.2. Las simulaciones fueron hechas de manera explícita, generando las sucesivas transiciones del proceso $\mathbf{X}(t)$.

En el Algoritmo 4.2.1 se presenta un pseudocódigo del procedimiento adoptado para llevar a cabo las simulaciones de los procesos estocásticos. La función $RandExp(\lambda)$ genera números aleatorios independientes con distribución exponencial de parámetro λ . Mientras que la función $RandUnif(0, 1)$ genera números aleatorios independientes con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

Las definiciones de las tasas de revisión, probabilidades de cambio de estrategia y vectores de transición se encuentran en la Sección 3.16.

En resumen el algoritmo sortea los tiempos de revisión de los agentes, y aquel con el menor tiempo de revisión será quien debe revisar. Luego se hace un nuevo sorteo que simula la comparación de retornos esperados entre el agente que revisa y su referente a quien debe decidir si imitar o no. Una vez decidido si cambia o no de estrategia, se procede a modificar, o no, el vector de poblaciones.

Se puede anticipar observando el Algoritmo 4.2.1 que simular paso a paso el proceso estocástico puede llegar a resultar costoso del punto de vista computacional. Para poblaciones muy grandes ($N_F, N_W \gg 1$) y tiempos de simulación muy largos ($t_{fin} \gg 1$) el tiempo de cómputo de estas simulaciones puede incluso dejar de ser práctico. Es obvio que a mayores t_{fin} mayor cantidad de iteraciones deberá realizar el algoritmo. Y por otro lado, si se deja fijo t_{fin} y se aumenta el tamaño de la población (con η fijo) la cantidad de pasos promedio para llegar a t_{fin} aumentará de forma lineal. Esto se debe a que las tasas (r_S, r_{NS}, r_I, r_{NI}) son inversamente proporcionales a N_F y N_W . Por ejemplo, duplicar las poblaciones divide a la mitad las tasas a lo largo de la simulación y eso duplicará, en promedio, la cantidad de pasos para llegar a t_{fin} .

En vista de esta posible limitación, se menciona en la Sección 3.1.3.3 un posible enfoque alternativo para simular aproximaciones del proceso estocástico. Referimos también al lector al Capítulo 5 sobre líneas de trabajo a futuro sobre este tema.

4.2.2.1. Proceso Convergente a la Trampa de Pobreza

La condición inicial elegida para la simulación fue $x_{S0} = 0.3$ e $y_{I0} = 0.6$, la cual se encuentra en la cuenca de atracción de la trampa de pobreza (NS, NI). Se eligió en todos los casos $\eta = 0.1$ como proporción entre firmas y trabajadores.

En la Figura 4.6 se presentan 10 realizaciones del proceso con $N_F = 20$. Mientras que en la Figura 4.7 se tomó $N_F = 100$ y se simularon 10 realizaciones. Finalmente, en la Figura 4.8 se presentan 10 realizaciones del proceso pero con $N_F = 1000$.

En el Cuadro 4.5 se muestra, para cada N_F , la cantidad de pasos promedio que requirieron las simulaciones de las Figuras 4.6, 4.7 y 4.8. El aumento de pasos promedio de las simulaciones es proporcional a N_F , comportamiento que fue explicado en la sección 4.2.2.

En las Figuras 4.6, 4.7 y 4.8 se presentan las evoluciones temporales tanto de \mathbf{x}_S como de \mathbf{y}_I . También se muestran las trayectorias en el espacio de fases $(\mathbf{x}_S, \mathbf{y}_I)$.

Se puede observar en las figuras mencionadas anteriormente que la componente $\mathbf{y}_I(t)$ tiene más dispersión que $\mathbf{x}_S(t)$. Esto se debe a que se fijó $\eta = 0.1$ con lo cual hay diez veces más

Algorithm 4.2.1 Procedimiento de Simulación del Proceso $\mathbf{X}(t)$

```

 $X_0, t_0, t_{fin}$ 
 $N_W, N_F$ 
 $k = 0,$ 

while  $t_k < t_{fin}$  do
   $\Delta_T^S := RandExp((r_S(X_k) x_S N_W)^{-1})$ 
   $\Delta_T^{NS} := RandExp((r_{NS}(X_k) x_{NS} N_W)^{-1})$ 
   $\Delta_T^I := RandExp((r_I(X_k) x_I N_F)^{-1})$ 
   $\Delta_T^{NI} := RandExp((r_{NI}(X_k) x_{NI} N_F)^{-1})$ 

  %% Se decide qué tipo de agente revisa su estrategia
   $\Delta_T^{Min} := \min(\Delta_T^S, \Delta_T^{NS}, \Delta_T^I, \Delta_T^{NI})$ 
  if  $\Delta_T^S = \Delta_T^{Min}$  then
     $p_{Trans} := x_{NS} f_W(X)$ 
     $Trans := \tau_{S,NS}$ 
  else if  $\Delta_T^{NS} = \Delta_T^{Min}$  then
     $p_{Trans} := x_S (1 - f_W(X))$ 
     $Trans := \tau_{NS,S}$ 
  else if  $\Delta_T^I = \Delta_T^{Min}$  then
     $p_{Trans} := y_I f_F(X)$ 
     $Trans := \tau_{I,NI}$ 
  else  $\Delta_T^{NI} = \Delta_T^{Min}$ 
     $p_{Trans} := y_{NI} (1 - f_F(X))$ 
     $Trans := \tau_{NI,I}$ 
  end if

  %% Se hace el sorteo de la comparación de retornos esperados
  if  $p_{Trans} < RandUnif(0, 1)$  then
     $X_{k+1} = X_k + Trans$ 
     $t_{k+1} = t_k + \Delta_T^{Min}$ 
     $k = k + 1$ 
  else
     $X_{k+1} = X_k$ 
     $t_{k+1} = t_k + \Delta_T^{Min}$ 
     $k = k + 1$ 
  end if
end while

```

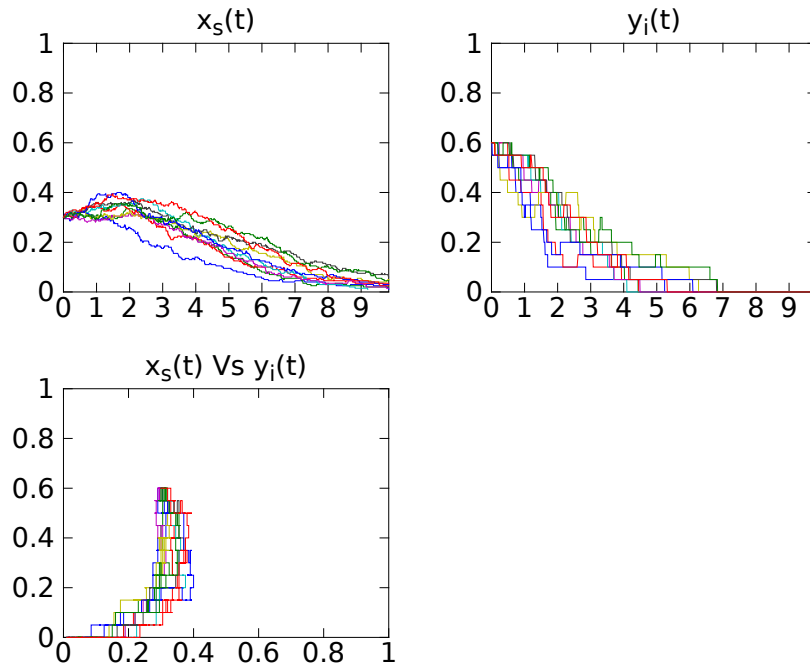


Figura 4.6 – 10 Trazas de $\mathbf{X}(t)$ con $N_F = 20$ - $(x_{S0}, y_{I0}) = (0.3, 0.6)$

N_F	# Pasos Promedio
20	1756
100	9757
1000	98356

Cuadro 4.5 – Cantidad de Pasos Promedio - $x_{S0} = 0.3$, $y_{I0} = 0.6$

trabajadores que firmas y por lo tanto el comportamiento de los trabajadores está más cerca del asintótico que el de las firmas.

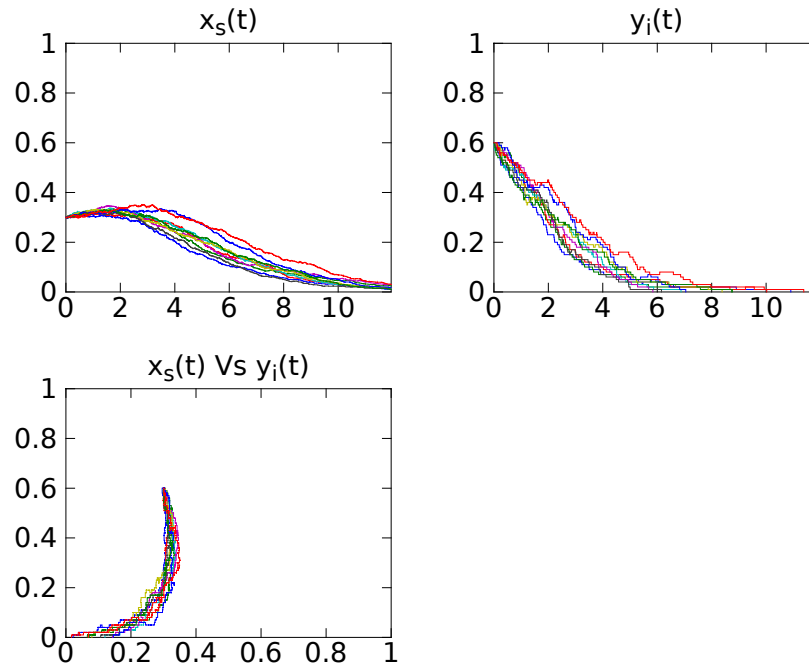


Figura 4.7 – 10 Trazas de $\mathbf{X}(t)$ con $N_F = 100 - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.3, 0.6)$

4.2.2.2. Proceso Convergente al Equilibrio Pareto Óptimo

Presentamos a continuación otras tres figuras que corresponden una nueva condición inicial, para la cual el proceso converge al equilibrio Pareto óptimo $(x_S, y_I) = (1, 1)$. Dicha condición inicial es: $x_{S0} = 0.2$ e $y_{I0} = 0.85$.

Nuevamente se simuló 10 realizaciones para varios casos. Primero, la Figura 4.9 se realizó con $N_F = 20$, mientras que la Figura 4.10 corresponde a $N_F = 100$ y por último la Figura 4.11 resulta de tomar $N_F = 1000$.

En el Cuadro 4.6 resumimos la cantidad de pasos promedio necesarios para las simulaciones mencionadas en el párrafo anterior. Verifica nuevamente la relación lineal entre N_F y la cantidad de pasos promedio de las simulaciones.

N_F	# Pasos Promedio
20	1392
100	7993
1000	76039

Cuadro 4.6 – Cantidad de Pasos Promedio - $x_{S0} = 0.2, y_{I0} = 0.85$

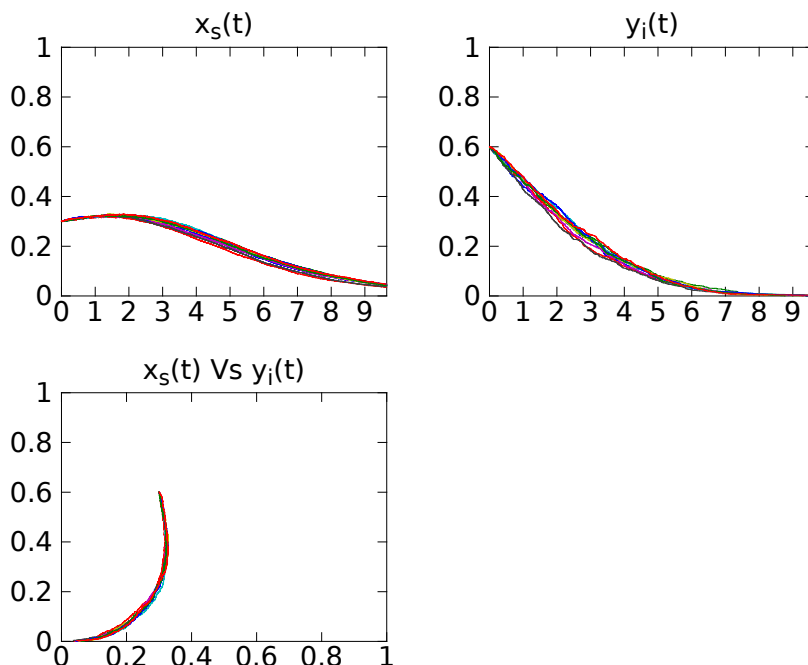


Figura 4.8 – 10 Trazas de $\mathbf{X}(t)$ con $N_F = 1000$ - $(x_{S0}, y_{I0}) = (0.3, .6)$

4.2.3. Soluciones de la Dinámica del Replicador

A continuación presentamos las soluciones del sistema de EDOs del replicador (3.48) con los parámetros definidos en 4.2.1. Se usó el método de Dormand-Prince (ver Sección 4.1.1) para resolver numéricamente el sistema de EDOs y las soluciones se hallaron hasta un tiempo t_{fin} tal que: $\|Y_{t_{fin}} - Y_{AE}\| < 1 \times 10^{-2}$, siendo Y_{AE} alguno de los puntos asintóticamente estables del sistema de EDOs.

Primero presentaremos las soluciones determinísticas usando las mismas condiciones iniciales usadas para las simulaciones estocásticas presentadas en la Sección 4.2.2. Y luego se presentan las cuencas de atracción de la EDO del modelo sin intervención externa.

4.2.3.1. Dinámica Convergente a la Trampa de Pobreza

En la Figura 4.12 se muestra la solución de la EDO para la condición inicial $(x_{S0}, y_{I0}) = (0.3, 0.6)$. En la misma se presentan x_S e y_I en función del tiempo y también la trayectoria $(x_S(t), y_I(t))$.

Se verifica una muy buena aproximación entre la solución determinística y las realizaciones del proceso para $N_F = 1000$ (ver Figura 4.8).

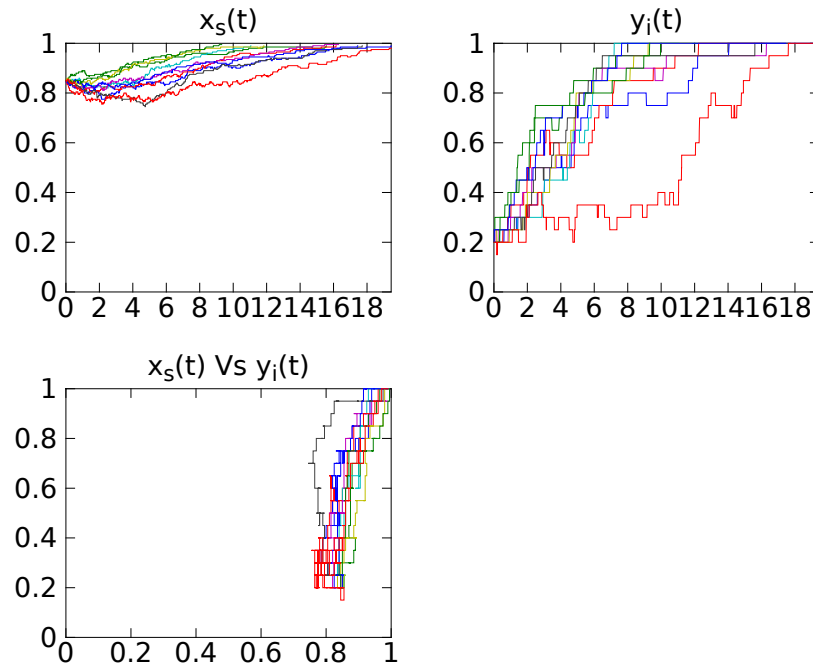


Figura 4.9 – 10 Trazas de $\mathbf{X}(t)$ con $N_F = 20 - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.85, 0.2)$

4.2.3.2. Dinámica Convergente al Equilibrio Pareto Óptimo

A continuación se presenta la solución de la EDO del replicador con condiciones iniciales $(x_{S0}, y_{I0}) = (0.85, 0.2)$. La figura es análoga a la de la Sección 4.2.3.1.

Nuevamente se verifica una muy buena aproximación entre el proceso estocástico de población $N_W = 1000$ presentado en la Figura 4.13 y la solución determinística de la EDO del replicador.

4.2.3.3. Cuencas de Atracción de los Equilibrios Estables

Finalmente, presentamos en la Figura 4.14 para el modelo de competición entre firmas y trabajadores sin intervención externa las cuencas de atracción tanto de la trampa de pobreza como del equilibrio pareto óptimo. En la figura en cuestión se muestra la frontera de las cuencas como una línea negra. Dicha frontera es una trayectoria inestable de la EDO, la cual no puede ser resuelta numéricamente avanzando con pasos discretos. Esto se debe a que dado un error, por pequeño que sea, este se amplifica y aparta rápidamente la solución numérica de la trayectoria inestable. También se muestran como diamantes rojos, los equilibrios de Nash del juego. Se debe notar que el equilibrio mixto (interior a $[0, 1]^2$) se encuentra exactamente sobre la frontera de las cuencas de atracción y que el campo vectorial de la EDO fluye hacia los equilibrios restantes. También se agregaron de manera ilustrativa como diamantes negros las condiciones iniciales usadas en las secciones anteriores, verificándose que se encuentran en las cuencas de atracción supuestas.

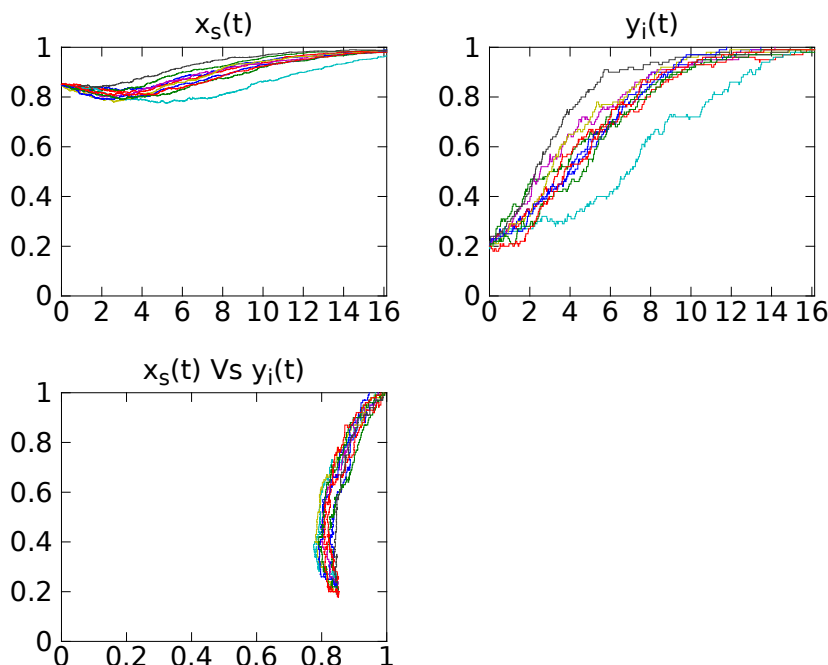


Figura 4.10 – 10 Trazas de $\mathbf{X}(t)$ con $N_F = 100 - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.85, 0.2)$

4.3. Modelo Con Intervención Externa

En esta sección presentamos los resultados de las soluciones numéricas del sistema de EDOs del modelo de competencia entre firmas y trabajadores con intervención externa. El modelo fue introducido y descrito en la Sección 3.2 y el sistema de EDOs que gobierna la dinámica evolutiva para poblaciones infinitas se encuentra en la Sección 3.2.3.

Se presentara un ejemplo numérico con una condición inicial tal que la economía sin intervención evoluciona hacia la trampa de pobreza, pero en la economía con intervención externa evoluciona hacia el equilibrio pareto-eficiente $(x_S, y_I) = (1, 1)$.

4.3.1. Parámetros del Modelo Con Intervención Externa

El ejemplo que se presenta en esta sección tiene como condición inicial: $(x_{S0}, y_{I0}) = (0.3, 0.6)$. Se mantienen los mismos parámetros económicos que los presentados en el Cuadro 4.2 y se agregan también algunos parámetros específicos del modelo con intervención externa, como ser los parámetros de control (Φ^i y Φ^{ii}) del agente externo para cada etapa y el tiempo (δ_t) necesario para asegurar la entrada a la cuenca de atracción del equilibrio pareto-eficiente en la economía con impuestos.

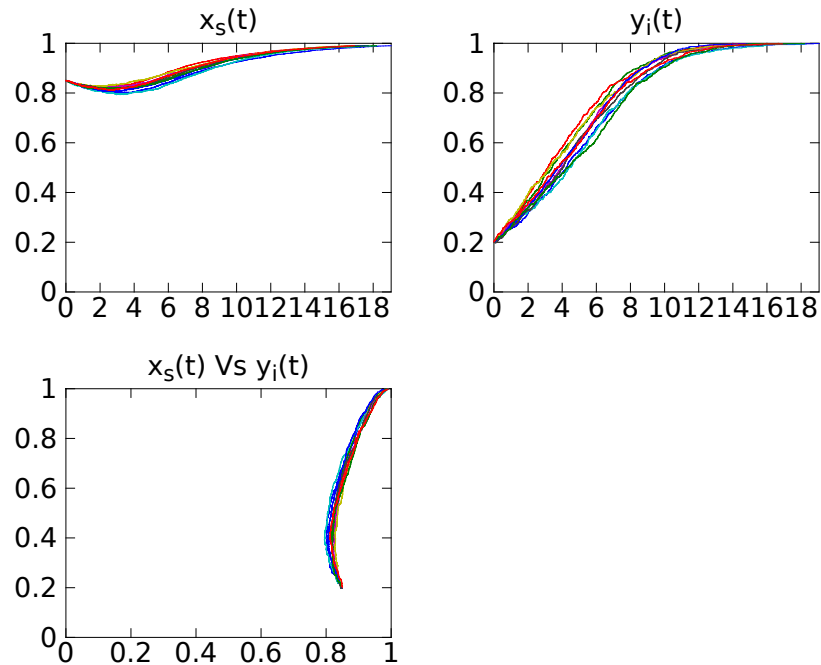


Figura 4.11 – 10 Trazas de $\mathbf{X}(t)$ con $N_F = 1000 - (x_{s0}, y_{i0}) = (0.85, 0.2)$

Parámetro	Valor
m_W^i	0.0000
m_F^i	0.0875
I_W^i	0.0000
I_F^i	0.0000
δ_t	1.5000
m_W^{ii}	0.0000
m_F^{ii}	0.0000
I_W^{ii}	0.0200
I_F^{ii}	0.0100

Cuadro 4.7 – Valores de Parámetros Específicos del Modelo Con Intervención

Cabe mencionar que los subsidios de la etapa i (etapa de incentivos) se calcularon con el criterio de que el equilibrio de Nash Mixto del juego con subsidios se encuentre dentro del rectángulo definido por los puntos $(0, 0)$ y (x_{s0}, x_{i0}) . Mediante esta elección se logra que se evolucione, en la dinámica con subsidios, desde la condición inicial hacia el equilibrio pareto óptimo $(1, 1)$.

En lo que refiere al valor de los impuestos de la etapa ii (etapa impositiva), estos fueron elegidos solamente con la condición de que fueran de un orden similar a los incentivos. Lógicamente, cuanto mayores sean los impuestos menor duración tendrá la etapa impositiva, pero

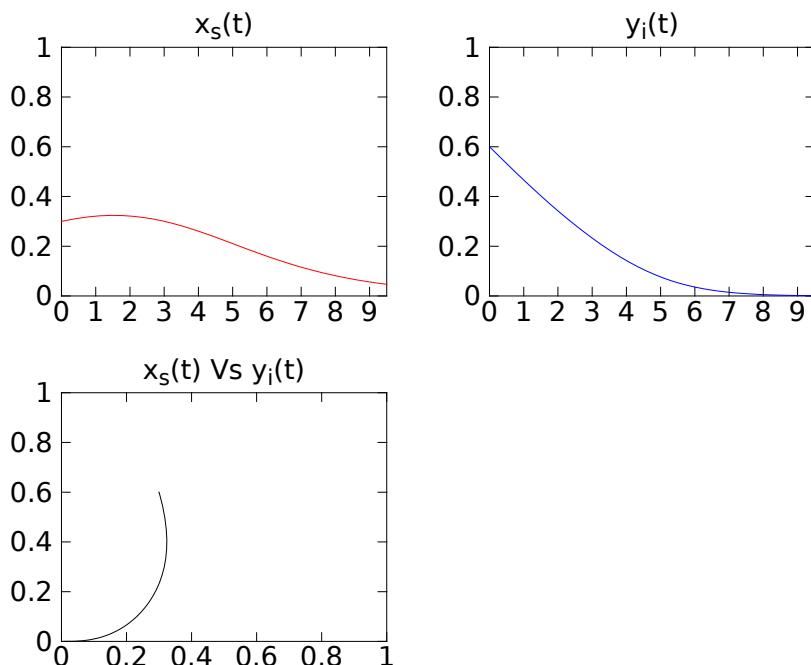


Figura 4.12 – Solución Determinística $X(t) - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.3, 0.6)$

más impopulares serán.

En la Figura 4.15 se puede ver la cuenca de atracción de la dinámica en la etapa i (etapa de subsidios) y el punto inicial como un diamante negro. Se comprueba que la condición inicial pertenece a la cuenca de atracción del equilibrio pareto-eficiente de la dinámica con incentivos. También se debe observar que, en comparación con la economía sin intervención externa, los subsidios incrementan el área de la cuenca de atracción del equilibrio pareto-eficiente. Esto significa que hay menos condiciones iniciales que evolucionan hacia la trampa de pobreza.

Mientras que en la Figura 4.16 se muestra la cuenca de atracción de la dinámica en la etapa ii (etapa de impuestos) y nuevamente se marca el punto inicial de la dinámica con un diamante negro. Se puede comprobar que, de manera inversa al caso de los subsidios, un incremento de los impuestos disminuye el área de la cuenca de atracción del equilibrio pareto-eficiente.

4.3.2. Solución de la Dinámica del Replicador

La evolución de las poblaciones para la dinámica dada en la Sección 3.2.3 y los parámetros indicados en los cuadros 4.2 y 4.3.1 se presenta en la Figura 4.17.

En la figura mencionada, se muestran los gráficos de $x_S(t)$ en rojo, $y_I(t)$ en azul y la trayectoria $(x_S(t), y_I(t))$ en negro. También, junto a la trayectoria en el espacio de estados $(x_S(t), y_I(t))$, se muestra en magenta la frontera de las cuencas de atracción de la dinámica con incentivos (etapa i) y en verde la frontera de las cuencas de la dinámica con impuestos (etapa ii).

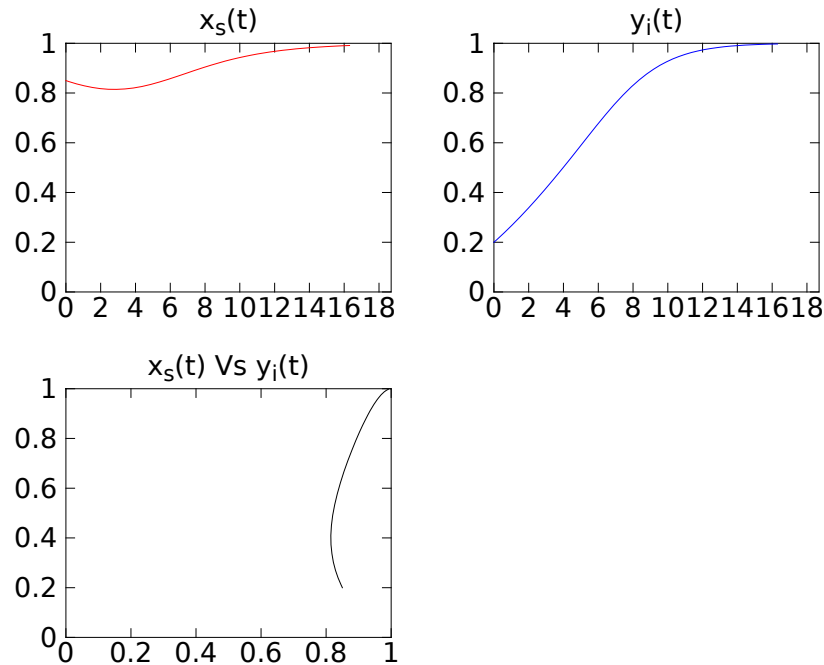


Figura 4.13 – Solución Determinística $X(t) - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.85, 0.2)$

Se pueden observar las tres etapas bien diferenciadas, cada una de ellas respondiendo a un campo vectorial distinto. También se debe notar que el tiempo (δ_t) extra que se mantienen los subsidios luego que se llega a la frontera de las cuencas de atracción del estado ii es suficiente para que haya una distancia segura entre el estado de la economía en t^i y la frontera de la cuenca de atracción del estado ii .

En el Cuadro 4.8 resumimos los tiempos y tamaños de las sub-poblaciones para los cambios de etapas, los símbolos corresponden a la Figura 4.17.

		t	$x_S(t)$	$y_I(t)$
Inicio:	(◆)	0	0.300	0.600
Fin Etapa i :	(○)	4.873	0.518	0.860
Fin Etapa ii :	(■)	9.413	0.720	0.840

Cuadro 4.8 – Resultados de Dinámica con Intervención Externa - $(x_S(0), y_I(0)) = (0.3, 0.6)$

Como información complementaria, indicamos que el valor de el préstamo necesario, asumiendo $N_W = 1000$ y $N_W = 10000$ (recordar que fijamos $\eta = 0.1$), es igual a 60.99 y por definición el monto recaudado es igual al valor del préstamo.

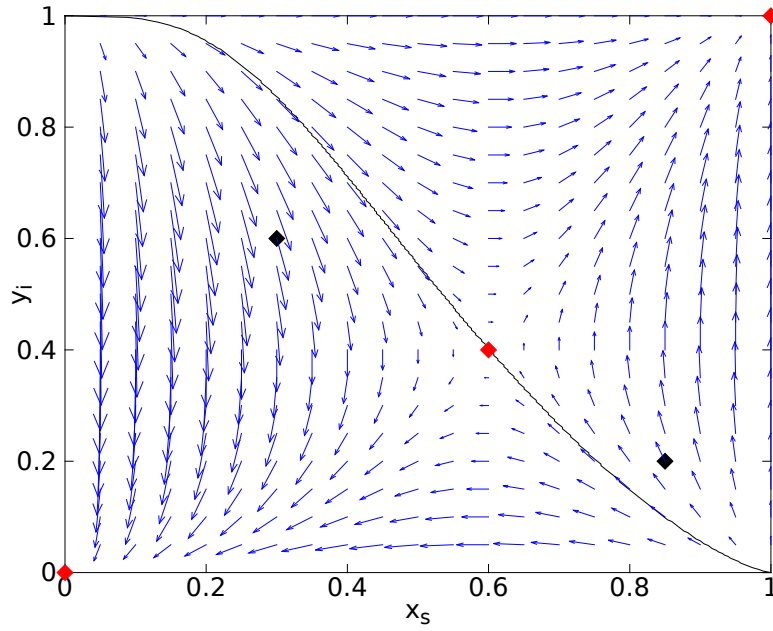
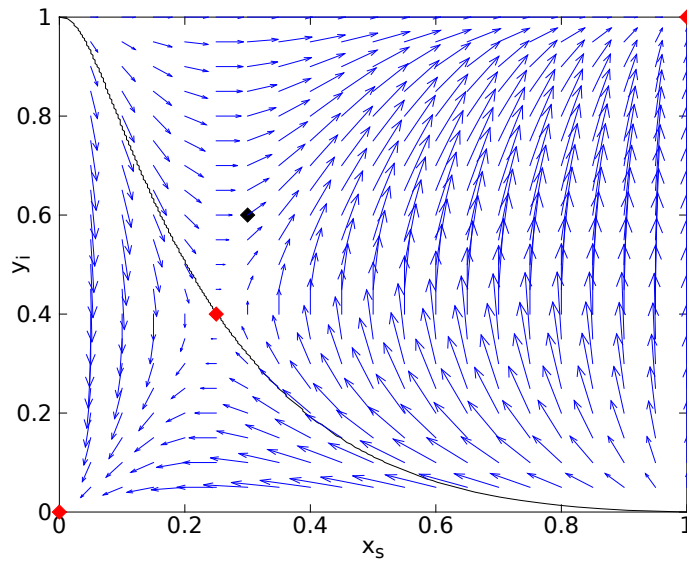


Figura 4.14 – Cuencas de Atracción de los Equilibrios Estables - Modelo Sin Intervención

Figura 4.15 – Cuencas de Atracción de los Equilibrios Estables - Etapa i con Incentivos

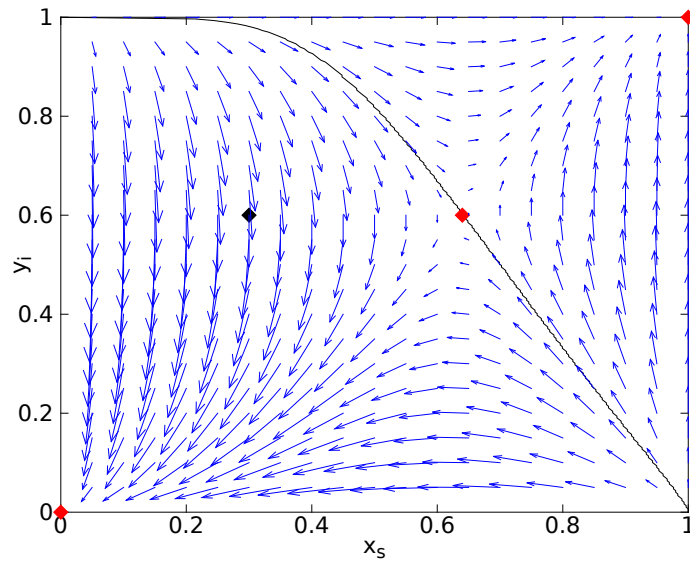


Figura 4.16 – Cuencas de Atracción de los Equilibrios Estables - Etapa *ii* con Impuestos

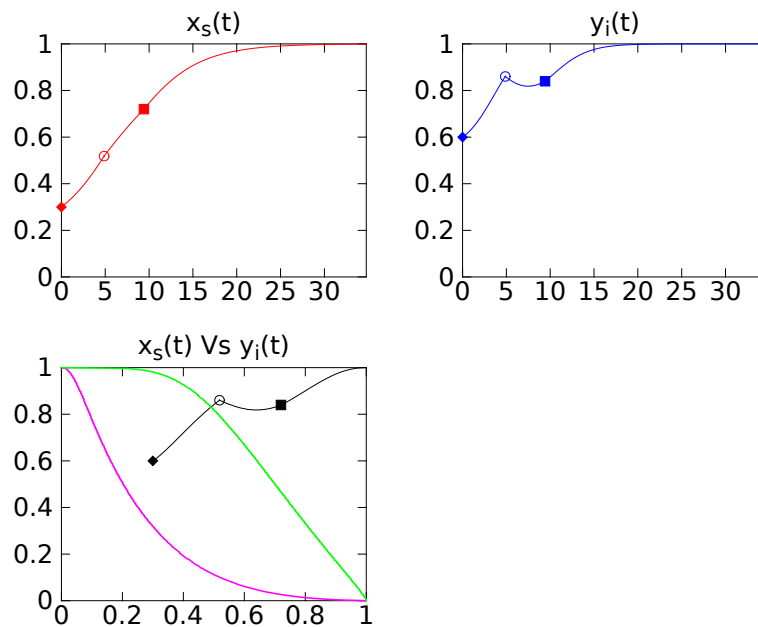


Figura 4.17 – Solución EDO Modelo con Intervención Externa - $(x_S(0), y_I(0)) = (0.3, 0.6)$

En resumen, se observa que el mecanismo de control es exitoso ya que logra evitar que la economía evolucione hacia la trampa de pobreza. Otra observación relevante es que, para los parámetros elegidos, comparando las figuras 4.12 y 4.17 se puede notar que el periodo de intervención $[0, t^{ii}]$ es del mismo orden de magnitud que la escala de tiempo de la evolución de la economía sin intervención externa. Esto es positivo ya que permite suponer que se pueden encausar economías hacia escenarios desarrollados en lapsos de tiempo razonables.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

A continuación presentaremos las conclusiones que resultan del trabajo expuesto en la presente tesis. Dichas conclusiones se dividirán en varias áreas, siendo éstas Economía, Teoría de Juegos Evolutivos y Métodos Numéricos. Finalmente, se resumirán brevemente algunas líneas de trabajo a futuro que pueden resultar de interés para el problema estudiado.

5.1. Conclusiones

En primer lugar, a partir del esquema de intervención mediante un regulador central propuesto en esta tesis, se concluye que es posible apartar al conjunto de trabajadores y firmas de una trampa de pobreza. Basta con una intervención planificada y también, dado el enfoque planteado en este trabajo, se debe contar con una institución que financie las acciones que toma el regulador central. También se verificó que, para los parámetros de intervención elegidos, el tiempo que toma a la economía alejarse de la trampa de pobreza y converger al equilibrio pareto-eficiente es del orden de la evolución sin intervención de la economía. Eso hace suponer que los resultados de una política de este tipo puedan ser tangibles en períodos de tiempo razonables.

Respecto del modelo con incentivos e impuestos, se verificó mediante la determinación de las cuencas de atracción de la EDO en cuestión, que incentivar los agentes innovadores reduce el alcance de la trampa de pobreza, mientras que imponer impuestos aumenta su alcance. Este comportamiento fue la base del esquema de intervención mediante el regulador central.

En cuanto a las simulaciones de procesos estocásticos del replicador, verificamos una muy buena aproximación entre las realizaciones del proceso para poblaciones grandes pero acotadas y el límite para poblaciones infinitas dado por las EDOs. A partir de lo anterior, se puede suponer que para poblaciones grandes, el comportamiento agregado de agentes se aproxima en buena medida al flujo determinístico correspondiente a poblaciones infinitas.

Finalmente, en lo que respecta a las implementaciones numéricas realizadas en la presente tesis, concluimos que el Método de Dormand-Prince resulta sumamente adecuado al problema numérico de resolver las EDOs resultantes de los modelos desarrollados en el presente trabajo. El método permitió resolver de manera flexible la EDO del modelo con intervención externa, la cual está definida a trozos, así como hallar las cuencas de atracción de los equilibrios de Nash

en tiempos cortos.

5.2. Trabajos a Futuro

A continuación enunciaremos brevemente algunas líneas de trabajo a futuro. Las mismas se desprenden del trabajo presentado en este documento.

La primera consiste en avanzar en la dirección indicada al final de la sección 3.1.3.3. En particular, se propone aproximar los procesos estocásticos del replicador mediante procesos que verifiquen una EDO estocástica. Esto permitiría en primer lugar simular de manera económica, mediante métodos numéricos para EDOs estocásticas, realizaciones de dichos procesos para poblaciones muy grandes y grandes intervalos de tiempos. En segundo lugar permitiría desarrollar estimaciones de bandas de confianza para las trayectorias determinísticas de la población mediante un Teorema Central del Límite Funcional derivado de la EDO estocástica.

Mientras que la segunda línea de trabajo a futuro sería la de aplicar el modelo a datos de alguna economía real, obteniendo de la misma los parámetros económicos relevantes y llevar a cabo el análisis de la evolución de la misma a partir del modelo presentado en este trabajo.

Apéndice A

Monotonía y Positividad de la Función de Crecimiento $q(x)$

En este apéndice probaremos la Proposición 2.2.7, enunciada en la Sección 2.2.3 del marco teórico.

Proposición A.0.1 *En una dinámica con dos estrategias por jugador ($m_i = 2$ con $i \in \mathcal{I}$), dada una función de crecimiento regular $q(x)$, esta será monótona en los retornos sii es positiva en los retornos.*

Prueba En primer lugar, dado que el jugador i tiene solo dos estrategias, se cumple la siguiente igualdad: $x_{ih} + x_{ik} = 1$.

En segundo lugar, el caso en el cual $x_{ik} = 0$ y $x_{ih} = 1$ no es de interés, ya que en ese caso las sub-poblaciones quedan fijas ($\dot{x}_{ih} = \dot{x}_{ik} = 0$) independientemente de las propiedades de $q_i(x)$. Con lo cual se asume en lo que sigue que $x_{ik} \neq 0$.

Dado lo anterior, podemos observar que:

$$u_i(e_i^h, x_{-i}) - u_i(x) = u_i(e_i^h, x_{-i}) - x_{ih}u_i(e_i^h, x_{-i}) - x_{ik}u_i(e_i^k, x_{-i}) \quad (\text{A.1})$$

$$= x_{ik} \left(u_i(e_i^h, x_{-i}) - u_i(e_i^k, x_{-i}) \right) \quad (\text{A.2})$$

Y también será necesario recordar que $q(x)$ es regular y por lo tanto se cumple que:

$$x_{ih}q_{ih} = -x_{ik}q_{ik} \quad (\text{A.3})$$

La monotonía respecto de los retornos es por definición:

$$u_i(e_i^h, x_{-i}) > u_i(e_i^k, x_{-i}) \Leftrightarrow q_{ih}(x) > q_{ik}(x) \quad (\text{A.4})$$

Ahora, a partir de la igualdad A.2 deducimos que el lado izquierdo de la equivalencia A.4 es a su vez equivalente a:

$$\text{sgn}[u_i(e_i^h, x_{-i}) - u_i(x)] = 1 \quad (\text{A.5})$$

Y a partir de la igualdad A.3 podemos concluir que el lado derecho de la equivalencia A.4 es equivalente a:

$$\operatorname{sgn}[q_{ih}(x)] = 1 \quad (\text{A.6})$$

Y por lo tanto, a partir de A.5 y A.6, la definición de monotonía es equivalente a:

$$\operatorname{sgn}[q_{ih}(x)] = \operatorname{sgn}[u_i(e_i^h, x_{-i}) - u_i(x)] \quad (\text{A.7})$$

Lo cual concluye la prueba. ■

Apéndice B

Cálculo de Probabilidades de Cambios de Estrategias

En el presente apéndice presentamos el cálculo de las probabilidades que, dado que revisan su estrategia, los agentes decidan cambiar a otra estrategia.

Como es usual, definiremos: $\Phi(t) = \Pr(\mathcal{N}(0, 1) \leq t)$ y usaremos los siguientes lemas sobre variables aleatorias Normales Gaussianas:

Lemma B.0.2 *Dadas $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ independientes, entonces $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$*

Lemma B.0.3 *Dada $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda X \sim \mathcal{N}(\mu, \lambda^2 \sigma^2)$*

Calcularemos $\Pr(\hat{u}_W(e^{NS}, y) > \hat{u}_W(e^S, y))$ usando las definiciones de los retornos esperados percibidos por los agentes ($\hat{u}_W(\cdot, \cdot)$ y $\hat{u}_W(\cdot, \cdot)$) dados en la Sección 3.1.2 y los lemas anteriores.

$$\begin{aligned} \Pr(\hat{u}_W(e^{NS}, y) > \hat{u}_W(e^S, y)) &= \Pr(u_W(e^{NS}, y) + \varepsilon > u_W(e^S, y) + \varepsilon') \\ &= \Pr(\varepsilon' - \varepsilon < u_W(e^{NS}, y) - u_W(e^S, y)) \\ &= F_{\varepsilon' - \varepsilon}(u_W(e^{NS}, y) - u_W(e^S, y)) \\ &= \Phi\left(\frac{u_W(e^{NS}, y) - u_W(e^S, y)}{\sqrt{2}\sigma_W}\right) \end{aligned}$$

Análogamente, el cálculo de $\Pr(\hat{u}_F(x, e^{NI}) > \hat{u}_F(x, e^I))$ resulta:

$$\begin{aligned} \Pr(\hat{u}_F(x, e^{NI}) > \hat{u}_F(x, e^I)) &= \Pr(u_F(x, e^{NI}) + \xi > u_F(x, e^I) + \xi') \\ &= \Pr(\xi' - \xi < u_F(x, e^{NI}) - u_F(x, e^I)) \\ &= F_{\xi' - \xi}(u_F(x, e^{NI}) - u_F(x, e^I)) \\ &= \Phi\left(\frac{u_F(x, e^{NI}) - u_F(x, e^I)}{\sqrt{2}\sigma_F}\right) \end{aligned}$$

Finalmente, para calcular $\Pr(\hat{u}_W(e^S, y) \geq \hat{u}_W(e^{NS}, y))$ y $\Pr(\hat{u}_F(x, e^{NI}) \geq \hat{u}_F(x, e^I))$, alcanza con observar que los sucesos son complementarios respecto de los ya calculados, con lo cual:

$$\Pr(\hat{u}_W(e^S, y) \geq \hat{u}_W(e^{NS}, y)) = \Phi\left(\frac{u_W(e^S - e^{NS}, y)}{\sqrt{2}\sigma_W}\right) = 1 - f_W(y)$$

$$\Pr(\hat{u}_F(x, e^I) \geq \hat{u}_F(x, e^{NI})) = \Phi\left(\frac{u_F(x, e^I - e^{NI})}{\sqrt{2}\sigma_F}\right) = 1 - f_F(x)$$

Apéndice C

Lemas y Definiciones - Teorema 3.1.6

En este apéndice, se detallan definiciones y algunos resultados necesarios para la demostración del Teorema 3.1.6, el cual refiere a la convergencia en L^1 de $\mathbf{X}(t)$ (proceso estocástico del replicador) a $X(t)$ (solución de la EDO del replicador).

C.1. Definición de Martingala

En esta sección del apéndice, se presenta la definición de Martingala. Lo que motiva la inclusión de esta definición es el hecho que en el teorema de convergencia del proceso $\mathbf{X}(t)$ se utiliza el hecho que el proceso $\mathbf{M}(t)$, que surge esencialmente como la diferencia $\mathbf{X}(t) - X(t)$, es una Martingala.

Supongamos que tenemos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$, también una filtración, o sea una familia de σ -álgebras $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}$ con $T \subset \mathbb{R}$ tal que se verifica: $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}_u \subset \mathcal{A}$ con $t \leq u$ y un proceso estocástico $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}$.

Definición C.1.1 $\{\mathbf{X}(t), \mathcal{A}_t\}_{t \in T}$ es una Martingala sii $\forall t \in T$ se cumple $E(|\mathbf{X}(t)|) < \infty$ y $\mathbf{X}(t) = E(\mathbf{X}(u) | \mathcal{A}_t)$ dado $t \leq u$.

Un ejemplo sencillo de Martingala en tiempo continuo es el proceso de *Poisson Compensado*. El mismo se define a partir de un proceso de *Poisson*: $\mathbf{N}(t)$ de intensidad constante $\lambda > 0$. El Proceso Compensado es: $\mathbf{C}(t) = \mathbf{N}(t) - \lambda t$. Dicho Proceso Compensado tiene incrementos independientes y además verifica que: $E(\mathbf{C}(t)) = E(\mathbf{N}(t) - \lambda t) = 0$ para cualquier $t \in T$. A partir de lo anterior y usando propiedades habituales de la esperanza condicional se puede probar que es una martingala de tiempo continuo:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{C}(u) | \mathcal{A}_t) &= E(\mathbf{C}(u) - \mathbf{C}(t) | \mathcal{A}_t) + E(\mathbf{C}(t) | \mathcal{A}_t) \\ &= E(\mathbf{C}(u) - \mathbf{C}(t) | \mathcal{A}_t) + \mathbf{C}(t) \\ &= E(\mathbf{C}(u) - \mathbf{C}(t)) + \mathbf{C}(t) \\ &= \mathbf{C}(t) \end{aligned}$$

C.2. Lemas sobre Supremos de Funciones Reales

Los siguientes lemas son utilizados para obtener la cota del supremo de la diferencia entre el proceso $\mathbf{X}(t)$ y la solución de la EDO $X(t)$.

Lemma C.2.1 *Dada una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ integrable en $[0, T] \in \mathbb{R}$, se cumple:*

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^t g(s) ds \leq \int_0^T \sup_{u \in [0, s]} g(u) ds$$

Prueba Primero, dado que $g(s) \geq 0$ tenemos que:

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^t g(s) ds = \int_0^T g(s) ds \quad (\text{C.1})$$

Por otro lado, a partir de la definición de supremo tenemos que, $\forall r \in \mathbb{R}^+$:

$$g(r) \leq \sup_{u \in [0, s]} g(u)$$

En particular para $r = s$ tenemos:

$$g(s) \leq \sup_{u \in [0, s]} g(u)$$

Integrando entre 0 y T respecto de s a ambos lados de la desigualdad anterior:

$$\int_0^T g(s) ds \leq \int_0^T \sup_{u \in [0, s]} g(u) ds \quad (\text{C.2})$$

A partir de C.1 y C.2 queda probado el lema. ■

Lemma C.2.2 *Dada una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ se cumple:*

$$\sup_{t \in [0, T]} g(t)^2 = \left(\sup_{t \in [0, T]} g(t) \right)^2$$

Prueba Primero, por definición de supremo, $\forall t \in [0, T]$:

$$0 \leq g(t) \leq \sup_{u \in [0, T]} g(u)$$

Elevando al cuadrado tenemos $\forall t \in [0, T]$:

$$g(t)^2 \leq \left(\sup_{u \in [0, T]} g(u) \right)^2$$

Dada la previa cota superior de $g(t)^2$ con $t \in [0, T]$ y la definición de supremo tenemos que:

$$\sup_{t \in [0, T]} g(t)^2 \leq \left(\sup_{u \in [0, T]} g(u) \right)^2$$

Asumimos que se cumple la desigualdad estricta y tomamos raíz cuadrada recordando que $g(t) \geq 0 \forall t \in [0, T]$:

$$\sqrt{\sup_{t \in [0, T]} g(t)^2} < \sup_{t \in [0, T]} g(t)$$

Nuevamente a partir de la definición de supremo, existe $g(s)$ con $s \in [0, T]$ tal que:

$$\sqrt{\sup_{t \in [0, T]} g(t)^2} < g(s)$$

Elevando al cuadrado llegamos a una contradicción de la definición de supremo:

$$\sup_{t \in [0, T]} g(t)^2 < g(s)^2$$

Con lo cual se debe cumplir la igualdad y queda demostrado el lema. ■

C.3. Cálculo de Cota para $E[\alpha(\mathbf{X}(t))]$

En este apéndice calcularemos, dado el proceso estocástico definido en 3.1.2, una cota para la siguiente cantidad: $E(\alpha(\mathbf{X}(t)))$.

Reiteramos en este apéndice la definición de la función $\alpha : S \rightarrow \mathbb{R}^+$:

$$\alpha(v) = \sum_{v' \neq v} \|v' - v\|_2^2 q(v, v') \quad (\text{C.3})$$

Dado que $E(\alpha(\mathbf{X}(t)))$ pertenece al recorrido de la función $\alpha(v)$, podemos plantear la siguiente desigualdad:

$$E(\alpha(\mathbf{X}(t))) \leq \sup_{v \in S} \alpha(v) \quad (\text{C.4})$$

Calcularemos entonces para los vectores de transiciones y tasas definidos en 3.1.2 el supremo de $\alpha(v)$ con $v \in S$.

El conjunto de vectores de transiciones con tasas no nulas es:

$$V = \{\tau_{S,NS}, \tau_{NS,S}, \tau_{I,NI}, \tau_{NI,I}\} \subset \mathbb{R}^4$$

Las expresiones para estos vectores en coordenadas se encuentran en: 3.18, 3.19, 3.20 y 3.21. Mientras que las tasas de transición, expresadas como función de un vector transición y un vector de origen, están en: 3.23, 3.24, 3.25 y 3.25.

A continuación reescribimos la ecuación C.3 usando las referencias anteriores de los vectores de transiciones y sus respectivas tasas.

$$\alpha(v) = \sum_{\tau \in V} \|\tau\|_2^2 q(\tau, v) \quad (\text{C.5})$$

Sustituiremos C.5 en C.4 y usaremos que:

$$\sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x)$$

Con lo cual:

$$E(\alpha(\mathbf{X}(t))) \leq \sup_{v \in S} \sum_{\tau \in V} \|\tau\|_2^2 q(\tau, v) \quad (\text{C.6})$$

$$\leq \sum_{\tau \in V} \|\tau\|_2^2 \sup_{v \in S} q(\tau, v) \quad (\text{C.7})$$

A continuación se calculan las normas de las transiciones:

$$\begin{aligned} \|\tau_{S,NS}\|_2^2 &= \frac{2}{N_W^2} \\ \|\tau_{NS,S}\|_2^2 &= \frac{2}{N_W^2} \\ \|\tau_{I,NI}\|_2^2 &= \frac{2}{\eta^2 N_W^2} \\ \|\tau_{NI,I}\|_2^2 &= \frac{2}{\eta^2 N_W^2} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Recordamos la notación:

$$\begin{aligned} z &= (x_S, x_{NS}, y_I, y_{NI}) \in S \\ x &= (x_S, x_{NS}) \in G_W^2 \\ y &= (y_I, y_{NI}) \in G_F^2 \end{aligned}$$

Con lo cual los supremos de las tasas resultan:

$$\begin{aligned} \sup_{z \in S} q(\tau_{S,NS}, z) &= N_W \sup_{z \in S} x_S x_{NS} r_S(y) f_W(y) \\ \sup_{z \in S} q(\tau_{NS,S}, z) &= N_W \sup_{z \in S} x_S x_{NS} r_{NS}(y) (1 - f_W(y)) \\ \sup_{z \in S} q(\tau_{I,NI}, z) &= \eta N_W \sup_{z \in S} y_I y_{NI} r_I(x) f_F(x) \\ \sup_{z \in S} q(\tau_{NI,I}, z) &= \eta N_W \sup_{z \in S} y_I y_{NI} r_{NI}(x) (1 - f_F(x)) \end{aligned}$$

Las funciones de z a las cuales se les toma el supremo son continuas y diferenciables en \mathbb{R}^4 y dado que el conjunto $S \subset \mathbb{R}^4$ es acotado, dichos supremos existen y los llamamos $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
\sup_{z \in S} q(\tau_{S,NS}, z) &= N_W c_1 \\
\sup_{z \in S} q(\tau_{NS,S}, z) &= N_W c_2 \\
\sup_{z \in S} q(\tau_{I,NI}, z) &= \eta N_W c_3 \\
\sup_{z \in S} q(\tau_{NI,I}, z) &= \eta N_W c_4
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Finalmente, usando C.8 y C.9 en la desigualdad C.7 tenemos:

$$\begin{aligned}
E(\alpha(\mathbf{X}(t))) &\leq \left(\frac{2}{N_W^2} N_W c_1 + \frac{2}{N_W^2} N_W c_2 + \dots \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{\eta^2 N_W^2} \eta N_W c_3 + \frac{2}{\eta^2 N_W^2} \eta N_W c_4 \right) \\
&\leq \frac{2 \left(c_1 + c_2 + \frac{c_3}{\eta} + \frac{c_4}{\eta} \right)}{N_W}
\end{aligned}$$

Concluimos que, si llamamos $c = 2 \left(c_1 + c_2 + \frac{c_3}{\eta} + \frac{c_4}{\eta} \right) \in \mathbb{R}^+$, se cumple:

$$E(\alpha(\mathbf{X}(t))) \leq \frac{c}{N_W} \tag{C.10}$$

C.4. Lema de Grönwall

A continuación enunciamos un lema clásico, utilizado en el teorema de convergencia del proceso estocástico a la solución determinística de la EDO del replicador. La demostración puede encontrarse en [Robert, 2003].

Lemma C.4.1 (Lema de Grönwall) *Si f y h son funciones Borelianas no-negativas en \mathbb{R}^+ y se tiene $\epsilon > 0$ tal que $\forall s \leq t$:*

$$f(s) \leq \epsilon + \int_0^s f(u)h(u)du \tag{C.11}$$

Entonces se cumple $\forall s \leq t$:

$$f(s) \leq \epsilon e^{\int_0^s h(u)du} \tag{C.12}$$

Apéndice D

Cálculo de la Matriz Jacobiana de F

En este apéndice presentamos las expresiones que permiten calcular la matriz Jacobiana para la EDO 3.48 del modelo sin intervención externa y la ecuación 3.81 del modelo con intervención externa.

Para ambos modelos, la EDO se puede escribir como:

$$\dot{Y}(t) = F(Y(t))$$

Donde para el modelo con intervención externa la función $F(\cdot)$ resulta, con $Z = (x, y)^T$, $u = (x, 1 - x)$ y $v = (y, 1 - y)$:

$$F(Z) = \begin{pmatrix} x(1-x) [r_{NS}(v, \Phi) (1 - f_W(v, \Phi)) - r_S(v, \Phi) f_W(v, \Phi)] \\ y(1-y) [r_{NI}(u, \Phi) (1 - f_F(u, \Phi)) - r_I(u, \Phi) f_F(u, \Phi)] \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Recordando que la función del modelo sin intervención externa es igual a la del modelo con intervención tomando $\Phi = (0, 0, 0, 0)^T$, deducimos que sólo es necesario hallar las expresiones de la Jacobiana para el segundo modelo.

Definamos las siguientes funciones para simplificar la notación:

$$G_W(y) = r_{NS}(v, \Phi) (1 - f_W(v, \Phi)) - r_S(v, \Phi) f_W(v, \Phi)$$

$$G_F(x) = r_{NI}(u, \Phi) (1 - f_F(u, \Phi)) - r_I(u, \Phi) f_F(u, \Phi)$$

De esta manera, la matriz Jacobiana de F sera:

$$J_F(Z) = \begin{pmatrix} (1 - 2x) G_W(y) & x(1-x) \frac{d}{dy} G_W(y) \\ y(1-y) \frac{d}{dx} G_F(x) & (1 - 2x) G_F(x) \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Hallaremos las derivadas de las funciones $G_W(\cdot)$ y $G_F(\cdot)$. Para ello calculamos las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}u_W^E(e^{NS}, y) &= \pi_W^E(NS, I) - \pi_W^E(NS, NI) \\
\frac{d}{dy}u_W^E(e^S, y) &= \pi_W^E(S, I) - \pi_W^E(S, NI) \\
\frac{d}{dx}u_F^E(x, e^{NI}) &= \pi_F^E(S, NI) - \pi_F^E(NS, NI) \\
\frac{d}{dx}u_F^E(x, e^I) &= \pi_F^E(S, I) - \pi_F^E(NS, I)
\end{aligned}$$

Y también definiendo $\varphi(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2}}$, calculamos las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}f_W(y) &= \varphi\left(\frac{u_W^E(e^{NS} - e^S, y)}{\sqrt{2}\sigma_W}\right) \frac{\frac{d}{dy}u_W^E(e^{NS}, y) - \frac{d}{dy}u_W^E(e^S, y)}{\sqrt{2}\sigma_W} \\
\frac{d}{dx}f_F(x) &= \varphi\left(\frac{u_F^E(x, e^{NI} - e^I)}{\sqrt{2}\sigma_F}\right) \frac{\frac{d}{dx}u_F^E(x, e^{NI}) - \frac{d}{dx}u_F^E(x, e^I)}{\sqrt{2}\sigma_F}
\end{aligned}$$

Ahora podemos expresar las derivadas de $G_W(\cdot)$ y $G_F(\cdot)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}G_W(y) &= \beta^W \left(\frac{d}{dy}u_W^E(e^S, y)f_W(y) - \frac{d}{dy}u_W^E(e^{NS}, y)(1 - f_W(y)) \right) - \\
&\quad \frac{d}{dy}f_W(y) (r_{NS}(y) + r_S(y)) \\
\frac{d}{dx}G_F(x) &= \beta^F \left(\frac{d}{dx}u_F^E(x, e^I)f_F(x) - \frac{d}{dx}u_F^E(x, e^{NI})(1 - f_F(x)) \right) - \\
&\quad \frac{d}{dx}f_F(x) (r_{NI}(x) + r_I(x))
\end{aligned}$$

Con esto quedan totalmente definidas las derivadas que componen $J_F(Z)$.

Bibliografía

- [Accinelli et al., 2010] Accinelli, E., London, S., Punzo, L., and Sanchez, E. (2010). Dynamic Complementarities, Efficiency and Nash Equilibria for Populations of Firms and Workers. *Journal of Economics and Econometrics*, 53(1):90–110.
- [Accinelli et al., 2011] Accinelli, E., London, S., Punzo, L. F., and Carrera, E. J. S. (2011). Poverty Traps, Rationality and Evolution. *Dynamics, Games and Science I*, 1:37–52.
- [Accinelli et al., 2009] Accinelli, E., London, S., and Sanchez, E. (2009). A Model of Imitative Behaviour in the Population of Firms and Workers.
- [Azariadis and Stachurski, 2005] Azariadis, C. and Stachurski, J. (2005). Chapter 5 Poverty Traps. In Aghion, P. and Durlauf, S., editors, *Handbook of Economic Growth*, number 913, chapter 5, pages 295–384. Elsevier.
- [Barrett and Swallow, 2006] Barrett, C. B. and Swallow, B. M. (2006). Fractal Poverty Traps. *World Development*, 34(1):1–15.
- [Benaïm and Weibull, 2003] Benaïm, M. and Weibull, J. (2003). Deterministic Approximation of Stochastic Evolution in Games. *Econometrica*, 71:873–903.
- [Benaïm and Weibull, 2009] Benaïm, M. and Weibull, J. (2009). Mean-field approximation of stochastic population processes in games.
- [Butcher, 2003] Butcher, J. (2003). Numerical Methods for Ordinary Differential Equations.
- [Dahlquist et al., 2003] Dahlquist, G., Bjorck, A., and Anderson, N. (2003). *Numerical Methods*. Dover Publications, reprint edition.
- [Darling and Norris, 2008] Darling, R. and Norris, J. (2008). Differential equation approximations for Markov chains. *Probability Surveys*, 5:37–79.
- [Dormand and Prince, 1980] Dormand, J. and Prince, P. (1980). A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1):19–26.
- [Ethier and Kurtz, 1986] Ethier, S. and Kurtz, T. (1986). *Markov Processes Characterization and Convergence*.
- [Hairer et al., 2011] Hairer, E., Norsett, S., and Wanner, G. (2011). *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer.
- [Hairer and Wanner, 2004] Hairer, E. and Wanner, G. (2004). Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential Algebraic Problems.
- [Hirsch and Smale, 1974] Hirsch, M. and Smale, S. (1974). *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Acad. Press.

- [Kuhn et al., 1994] Kuhn, H., Harsanyi, J., Selten, R., Weibull, J., van Damme, E., Nash, J., and Hammerstein, P. (1994). The work of John Nash in Game Theory - The Nobel Foundation Seminar.
- [Maynard Smith, 1997] Maynard Smith, J. (1997). Vega - Flight in Birds and Aeroplanes - Science Video, <http://www.vega.org.uk/video/programme/84>.
- [Maynard Smith and Price, 1973] Maynard Smith, J. and Price, G. R. (1973). The Logic of Animal Conflict. *Nature*, 246.
- [Nash, 1950] Nash, J. (1950). *Non-Cooperative Games*. PhD thesis, Princeton University.
- [Nash, 1951] Nash, J. (1951). Non-Cooperative Games. *The Annals of Mathematics*, 54(2):286–295.
- [Robert, 2003] Robert, P. (2003). *Stochastic Networks and Queues*. Springer.
- [Weibull, 1997] Weibull, J. W. (1997). *Evolutionary Game Theory*. MIT Press.

Índice de figuras

2.1. Esquema de la Dinámica Resultante de un Modelo de Crecimiento	9
3.1. Esquema de Trayectoria de la Dinámica con Intervención Externa	42
4.1. Ejemplo de Solución con D-P y Paso Adaptativo	50
4.2. Región de Estabilidad de Dormand-Prince	52
4.3. Tiempo de Cálculo de Cuenca de Atracción en función de n_p	56
4.4. Porcentaje de Utilización de Núcleos en Función de t , $n_p = 5$	57
4.5. Porcentaje de Utilización de Núcleos en Función de t , $n_p = 10$	57
4.6. 10 Trazas de $\mathbf{X}(t)$ con $N_F = 20 - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.3, 0.6)$	62
4.7. 10 Trazas de $\mathbf{X}(t)$ con $N_F = 100 - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.3, 0.6)$	63
4.8. 10 Trazas de $\mathbf{X}(t)$ con $N_F = 1000 - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.3, .6)$	64
4.9. 10 Trazas de $\mathbf{X}(t)$ con $N_F = 20 - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.85, 0.2)$	65
4.10. 10 Trazas de $\mathbf{X}(t)$ con $N_F = 100 - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.85, 0.2)$	66
4.11. 10 Trazas de $\mathbf{X}(t)$ con $N_F = 1000 - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.85, 0.2)$	67
4.12. Solución Determinística $X(t) - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.3, 0.6)$	68
4.13. Solución Determinística $X(t) - (x_{S0}, y_{I0}) = (0.85, 0.2)$	69
4.14. Cuencas de Atracción de los Equilibrios Estables - Modelo Sin Intervención . . .	70
4.15. Cuencas de Atracción de los Equilibrios Estables - Etapa i con Incentivos . . .	70
4.16. Cuencas de Atracción de los Equilibrios Estables - Etapa ii con Impuestos . . .	71
4.17. Solución EDO Modelo con Intervención Externa - $(x_S(0), y_I(0)) = (0.3, 0.6)$.	71