

TESIS

presentada el día 17 de Febrero de 2012 en la

Universidad de la República, UdelaR

para obtener el título de

MAGISTER EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

por

Juan Manuel BURGOS

Instituto de Investigación : IMERL - Facultad de Ingeniería

Componentes universitarios :

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

Título de la tesis :

K-Confiability en Redes: Factorización y Comportamiento Asintótico

defensa realizada el 16 de Marzo de 2012 ante el comité de examinadores

Dr. Ing. Franco	ROBLEDO	Director de Tesis
Dr. Marcelo	LANZILOTTA	Presidente
Dr. Gonzalo	PERERA	
Dr. Ing. Antonio	MAUTTONE	

Resumen: Este escrito desarrolla nuevos métodos tanto aproximados como exactos para el cálculo de la confiabilidad de un grafo. Este estudio culmina elegantemente en un Teorema que establece el comportamiento asintótico de la confiabilidad en términos de la conexidad del grafo en cuestión y en la Teoría de Factorización. Éstos son los resultados centrales de la tesis.

Índice general

Introducción	1
1. K-Confiabilidad de Redes	3
1.1. Definición de K-Confiabilidad	3
1.2. Algoritmo para el Cálculo Exacto de la K-Confiabilidad	4
1.3. Polinomio de K-Confiabilidad	8
2. Formas Simples y Grafos de Monma Generalizados	9
2.1. Introducción al Teorema de Factorización	9
2.2. Formas Simples	14
2.3. Algoritmo Polinomial para la K-Confiabilidad de Grafos de Monma Generalizados	16
3. Comportamiento Asintótico	18
3.1. Índices de Confiabilidad y Números de Conectividad	18
3.2. Estimación del Índice de Moore-Shannon	20
3.3. Comportamiento Asintótico de la Confiabilidad	22
4. Caso de Estudio: Red de ANTEL	26
4.1. Regiones Este y Oeste de la Red de ANTEL	26
4.2. Diseño de Mejoras respecto al Comportamiento Asintótico	29
5. Teoría de Factorización	32
5.1. Combinatoria del Problema	32
5.2. Teorema de Factorización	35
5.3. Invertibilidad de la Matriz de Conexidad	39
6. Conclusiones	51
A. Polinomios de Confiabilidad	52

Agradecimientos

Agradezco al Dr.Ing.Franco Robledo por proponer, apoyar y orientarme en este proyecto de Tesis. Agradezco a la Dr.Ing.Alejandra Beghelli por recibirme en su equipo de investigación en la Universidad de Santa María, Valparaíso, Chile, por tres semanas donde avancé significativamente en la escritura de esta tesis. Agradezco al Dr.Marcelo Lanzilotta por el apoyo constante y de quién aprendí todo lo que sé de álgebra, conocimiento que me permitió desarrollar la teoría de la factorización. Agradezco a Tomás Lázaro, programador y futuro Ingeniero, quién amable y elegantemente implementó el algoritmo de factorización en una estructura de datos de interés en sí misma que tanto me ayudó. Agradezco a mi padre, Msc.Ing.Manuel Burgos, por las conversaciones interesantes e inspiradoras respecto a la matemática e ingeniería de mi trabajo. Agradezco a mi novia Jimena cuyo amor y compañía me ayudan día a día a avanzar en mi vida.

Finalmente, agradezco a mis padres, Sara y Manuel, cuyo esfuerzo, trabajo y amor permitieron desarrollarme al punto de estar escribiendo esto hoy. Este trabajo está dedicado a ellos.

Introducción

El cálculo de la Confiabilidad de una red es un problema de complejidad no polinomial respecto al número de aristas por lo que hace valiosa cualquier nueva técnica de cálculo o aproximación.

El Capítulo 1 es una introducción al tema y contiene algunos métodos y técnicas conocidas para el cálculo exacto de la confiabilidad. Este capítulo introductorio no tiene nada de original y sigue de cerca los libros [Bi] y [Co].

Los siguientes capítulos, hasta donde el autor conoce, son originales. El Capítulo 2 es una introducción al teorema de factorización enunciado y demostrado en el Capítulo 5. Como aplicación de la factorización mencionada se expone una técnica para el cálculo exacto de la K -confiabilidad basado en lo que el autor denomina como formas simples, para grafos cuyo conjunto de vértices de grado mayor o igual a tres está incluido en K . Esto deriva en el Teorema de Descomposición (2.2.2), que permite descomponer un grafo en formas simples para el cálculo de la confiabilidad:

Teorema 0.0.1. *La K -confiabilidad de un grafo G tal que K contiene a los vértices de grado mayor o igual a tres, puede expresarse como una suma cuyos términos son productos de confiabilidades de formas simples.*

También se muestra con un ejemplo cómo calcular el polinomio de confiabilidad de un grafo en un sentido práctico. El capítulo concluye en otra aplicación que desarrolla un algoritmo de complejidad polinomial para el cálculo de confiabilidad de un grafo de Monma generalizado.

El Capítulo 3 aborda el problema de aproximar la confiabilidad cuando las confiabilidades de sus aristas son altas. Esto concluye en la descripción del comportamiento asintótico de la confiabilidad cuando las aristas tienden a ser perfectas (Teorema 3.3.3). Este teorema relaciona el comportamiento asintótico de la confiabilidad de un grafo aleatorio con su conexidad. Para el caso particular de un grafo homogéneo, el teorema permite una estimación del índice de Moore-Shannon. El teorema central del capítulo es el Teorema (3.3.3) que describe el comportamiento asintótico mencionado:

Teorema 0.0.2. *Sea $G = (V, E, (p_e)_{e \in E})$ un grafo aleatorio m -conexo de confiabilidades no nulas en sus aristas. Considerando a la confiabilidad de G como función de las variables $(p_e)_{e \in E}$, tenemos que su serie de Taylor alrededor de $\mathbf{1}$*

es:

$$R_{All}(G) = 1 - \sum_{\{e_1, \dots, e_m\} \in m-CutSets} (1 - p_{e_1})(1 - p_{e_2}) \dots (1 - p_{e_m}) + \dots$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de mayor grado.

El Capítulo 4 es una aplicación del Capítulo 3. En éste se estudia la descomposición de la red de transporte de ANTEL en su región Este y Oeste y se calculan aproximaciones de sus polinomios de confiabilidad. Como corolario de las técnicas del capítulo anterior, desarrolla una técnica sencilla para el cálculo de la mejora de confiabilidad en el diseño de nuevas conexiones en la red mediante la fórmula:

$$\Delta N_2^{All} = \Delta N_2^{gr \geq 3} - \sum_i a_i b_i \leq 0$$

siendo a_1, b_1 y a_2, b_2 las distancias en aristas a los extremos de los arcos a los que está conectada la nueva arista responsable de la mejora que se quiere cuantificar (ver Figura (4.4)). Como corolario se tiene un resultado cualitativo no trivial respecto al diseño de mejoras de la red. El capítulo concluye calculando algunas mejoras relevantes.

El Capítulo 5 es la teoría de factorización. El nivel matemático de este capítulo es muy superior respecto al resto de la tesis y desarrolla nuevas técnicas interesantes en sí mismas. La primera sección transforma el problema en principio probabilístico en un problema combinatorio mediante un funcional apropiado. La segunda sección consiste en el teorema de factorización y muestra que una vez resuelta la combinatoria del problema, el teorema se reduce, en esencia, a invertir la matriz de conexidad (concepto explicado en el texto). Que esta matriz es invertible es el objeto de toda la última sección.

El apéndice muestra algunos polinomios de confiabilidad calculados mediante el Teorema de Descomposición (2.2.2) del capítulo dos.

Capítulo 1

K-Confiability de Redes

1.1. Definición de K-Confiability

Un modelo matemático de una red cuyos nodos son perfectos y existe probabilidad no nula de fallas en sus aristas, es mediante un grafo no dirigido aleatorio (o grafo estocástico) G cuyos vértices son perfectos (probabilidad de falla nula) y sus aristas e_i tienen asociadas variables aleatorias independientes con distribución de Bernoulli:

$$e_i \sim Ber(p_i)$$

siendo p_i la probabilidad de que la arista e_i esté operativa. De aquí en más, los grafos serán no dirigidos.

Definición 1.1.1. Un grafo no dirigido G es un par (V, E) tal que V es un conjunto finito cuyos elementos llamaremos vértices y E es un subconjunto de $\{\{a, b\} / a, b \in V\} \times \mathbb{N}$ que llamaremos aristas tales que aristas distintas $(\{a_1, b_1\}, n_1), (\{a_2, b_2\}, n_2) \in E$ implica que $n_1 \neq n_2$.

Definición 1.1.2. Un grafo aleatorio G es una terna (V, E, Φ) tal que (V, E) es un grafo y Φ es una función del conjunto de aristas E al conjunto de medidas de probabilidad del espacio $\{0, 1\}$, es decir, $\Phi : E \rightarrow Ber$.

Toda variable aleatoria de Bernoulli está caracterizada por un parámetro p entre cero y uno por lo que podemos escribir a un grafo aleatorio como $(G, \{p_e\}_{e \in E})$ siendo G un grafo y p_e el parámetro de la variable $\Phi(e)$. Denotemos por $Ver(G)$ y $Ar(G)$ a los conjuntos de vértices y aristas de G respectivamente.

Definición 1.1.3. Un estado \mathcal{E} del grafo G es una función $\mathcal{E} : Ar(G) \rightarrow \{0, 1\}$.

Sea K un subconjunto de vértices de G :

$$K \subset Ver(G)$$

Dado un estado \mathcal{E} de G , considere el grafo que resulta de remover las aristas no operativas de G , es decir:

Definición 1.1.4. Un estado \mathcal{E} del grafo G determina un grafo $G - \mathcal{E}^{-1}(0)$ que resulta de remover las aristas e_i de G tales que $\mathcal{E}(e_i) = 0$.

Decimos que un estado \mathcal{E} es K -operativo si para cada par de vértices de K existe un camino constituido enteramente por aristas operativas que los conecta en G , esto es:

Definición 1.1.5. Un estado \mathcal{E} del grafo G es K -operativo si existe alguna componente conexa C_i de $G - \mathcal{E}^{-1}(0)$ tal que $K \subset Ver(C_i)$.

Al conjunto de estados K -operativos lo denotamos por Op_K . Decimos que un estado \mathcal{E} es un pathset si $\mathcal{E} \in Op_K$, caso contrario decimos que es un cutset.

Definimos la K -confiabilidad de G como la probabilidad de que un estado sea un pathset:

Definición 1.1.6. La K -Confiabilidad de un grafo aleatorio G es

$$R_K(G) \equiv P(\mathcal{E} \in Op_K)$$

De forma explícita, podemos calcular la K -Confiabilidad de la siguiente manera:

$$P(\mathcal{E}) = \prod_{e_i \in Ar(G)} [p_i \mathcal{E}(e_i) + (1 - p_i)(1 - \mathcal{E}(e_i))] \quad (1.1)$$

$$R_K(G) = \sum_{\mathcal{E} \in Op_K} P(\mathcal{E})$$

En [Br], Brown sostiene que el algoritmo que resulta de la fórmula de arriba debería ser usado por su fácil implementación. Ocurre que este algoritmo requiere tener la lista completa de todos los estados operacionales y esto es muy poco eficaz para grafos grandes.

1.2. Algoritmo para el Cálculo Exacto de la K-Confiabilidad

Definición 1.2.1. Considere una arista $e = (\{v, w\}, n) \in E$ de un grafo $G = (V, E)$ y definamos la siguiente relación de equivalencia en V : $a \sim b$ si $a = b$ o $\{a, b\} = \{v, w\}$. Considere la función sobreyectiva canónica $\pi : V \rightarrow V/\sim$ tal que $\pi(a) = [a]_{\sim}$. Definimos la contracción de la arista e en G como el grafo $G \cdot e$ tal que

$$G \cdot e = (V/\sim, E \cdot e)$$

siendo $E \cdot e = \{ (\{\pi(a), \pi(b)\}, n) / (\{a, b\}, n) \in E - \{e\} \}$ (vea la Figura 1.2). Si K es un subconjunto de vértices, denotamos por $K_e = \pi(K)$ al nuevo subconjunto de vértices que resulta de la contracción.

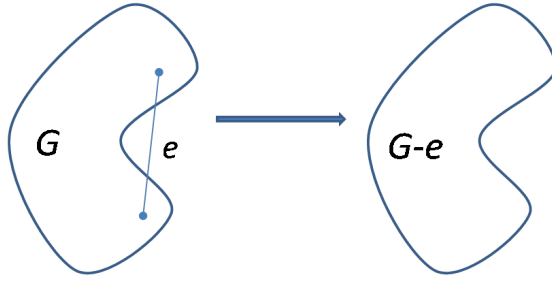


Figura 1.1: Extracción de la arista e

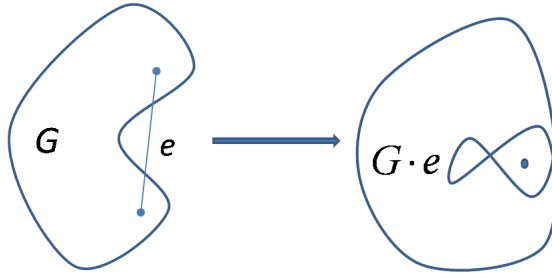


Figura 1.2: Contracción de la arista e

Definición 1.2.2. Considere una arista $e = (\{v, w\}, n) \in E$ de un grafo $G = (V, E)$. Definimos la extracción de e en G como el grafo (vea la Figura 1.1)

$$G - e = (V, E - \{e\})$$

Veamos el teorema de factorización simple.

Teorema 1.2.1. Sea G un grafo aleatorio y K un subconjunto de vértices de G . Considere una arista e_i de G y los grafos $G - e_i$ y $G \cdot e_i$ resultantes de remover y contraer e_i de G respectivamente. Sea K_i el subconjunto de vértices K de $G \cdot e_i$ resultante de la contracción. Así tenemos que

$$R_K(G) = p_i R_{K_i}(G \cdot e_i) + (1 - p_i) R_K(G - e_i)$$

Demostración: El conjunto de estados queda particionado de la siguiente manera

$$\{0, 1\}^{Ar(G)} = \{\mathcal{E}/\mathcal{E}(e_i) = 0\} \cup \{\mathcal{E}/\mathcal{E}(e_i) = 1\}$$

por lo que, mediante la regla de probabilidad de Bayes,

$$\begin{aligned} R_K(G) &= P(Op_K) \\ &= P((Op_K) \cap (\mathcal{E}(e_i) = 1)) + P((Op_K) \cap (\mathcal{E}(e_i) = 0)) \\ &= P(\mathcal{E}(e_i) = 1)P((Op_K)|(\mathcal{E}(e_i) = 1)) + P(\mathcal{E}(e_i) = 0)P((Op_K)|(\mathcal{E}(e_i) = 0)) \\ &= p_i P((Op_K)|(\mathcal{E}(e_i) = 1)) + (1 - p_i) P((Op_K)|(\mathcal{E}(e_i) = 0)) \\ &= p_i R_{K_i}(G \cdot e_i) + (1 - p_i) R_K(G - e_i) \end{aligned}$$

□

Podría darse una demostración igual de sencilla del teorema anterior (1.2.1) mediante la fórmula (1.1).

Definición 1.2.3. Dados dos estados \mathcal{E} y \mathcal{F} de G , definimos $\mathcal{E} \leq \mathcal{F}$ si $\mathcal{E}^{-1}(1) \subset \mathcal{F}^{-1}(1)$. El estado \mathcal{E} es un K -minpath si es minimal respecto a este orden parcial en el conjunto de los K -pathsets en Op_K .

Es claro que si $\mathcal{E} \leq \mathcal{F}$ y \mathcal{E} es un K -pathset entonces \mathcal{F} también lo es. Esta propiedad de los pathsets se denomina coherencia. También es claro, por inducción, que para todo K -pathset \mathcal{F} existe un K -minpath \mathcal{E} tal que $\mathcal{E} \leq \mathcal{F}$. En este sentido podemos decir que el conjunto de los K -minpath genera Op_K : Op_K es el conjunto de todos los estados \mathcal{F} para los que existe un K -minpath \mathcal{E} tal que $\mathcal{E} \leq \mathcal{F}$.

Definición 1.2.4. Una arista e de un grafo G es K -irrelevante si $\mathcal{E}(e) = 0$ para todo K -minpath \mathcal{E} .

Lema 1.2.2. Si e es una arista K -irrelevante entonces

$$R_K(G) = R_K(G - e)$$

Demostración: Debido a que e es una arista K -irrelevante de G , el conjunto de K -pathsets Op_K está constituido por pares \mathcal{E} y \mathcal{F} tales que $\mathcal{E}(e) = 1$, $\mathcal{F}(e) = 0$ y coinciden en las aristas de G distintas de e . De la fórmula (1.1) tenemos que

$$P(\mathcal{E}; G) + P(\mathcal{F}; G) = \prod_{e_i \in Ar(G-e)} [p_i \mathcal{E}(e_i) + (1 - p_i)(1 - \mathcal{E}(e_i))] = P(\mathcal{E}|_{G-e}; G - e)$$

por lo que

$$R_K(G) = \sum_{\mathcal{E} \in Op_K} P(\mathcal{E}; G) = \sum_{\mathcal{E} \in Op_K} P(\mathcal{E}|_{G-e}; G - e) = R_K(G - e)$$

lo que concluye la demostración. □

Definición 1.2.5. Un arco A de un grafo G es un subgrafo de tipo lineal cuyos extremos (que pueden coincidir) son vértices de grado mayor o igual a tres (como vértices de G) y sus vértices interiores son de grado dos (como vértices de G).

Lema 1.2.3. Sea $A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un arco de largo n con n aristas e_1, e_2, \dots, e_n y probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n respectivamente de un grafo aleatorio G , sin nodos interiores pertenecientes a K . Sea \tilde{G} el grafo aleatorio resultante de remover el camino A de G y conectar una arista de probabilidad $p_1 p_2 \dots p_n$. Entonces

$$R_K(G) = R_K(\tilde{G})$$

Demostración: Hagamos inducción en n , el largo del arco A . Si $n = 0$ o $n = 1$ no hay nada que probar. Supongamos que el resultado vale para $n - 1$. Aplicando el teorema de factorización simple (1.2.1) a e_n tenemos que

$$R_K(G) = p_n R_K(G \cdot e_n) + (1 - p_n) R_K(G - e_n)$$

y observando que las aristas e_1, e_2, \dots, e_{n-1} son K -irrelevantes en $G - e_n$, tenemos

$$R_K(G) = p_n R_K(G \cdot e_n) + (1 - p_n) R_K(G - A)$$

Aplicando la hipótesis inductiva al arco e_1, e_2, \dots, e_{n-1} de $G \cdot e_n$ junto con el teorema de factorización simple (1.2.1), concluimos que

$$\begin{aligned} R_K(G) &= p_n [p_1 p_2 \dots p_{n-1} R_K(G \cdot A) + (1 - p_1 p_2 \dots p_{n-1}) R_K(G - A)] + (1 - p_n) R_K(G - A) \\ &= p_1 p_2 \dots p_n R_K(G \cdot A) + (1 - p_1 p_2 \dots p_n) R_K(G - A) \end{aligned}$$

Por el teorema de factorización simple (1.2.1), el lema está demostrado. \square

Lema 1.2.4. *Sean e_1, e_2, \dots, e_n un conjunto de aristas conectadas en paralelo con probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n de un grafo aleatorio G . Sea \tilde{G} el grafo aleatorio resultante de remover las aristas e_1, e_2, \dots, e_n de G y conectar una arista de probabilidad $1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)$. Entonces*

$$R_K(G) = R_K(\tilde{G})$$

Demostración: Hagamos inducción en n . Si $n = 0$ o $n = 1$ no hay nada que probar. Supongamos que el resultado vale para $n - 1$. Aplicando el teorema de factorización simple (1.2.1) a e_n tenemos que

$$R_K(G) = p_n R_K(G \cdot e_n) + (1 - p_n) R_K(G - e_n)$$

y observando que las aristas e_1, e_2, \dots, e_{n-1} (abuso de notación mediante) son K -irrelevantes en $G \cdot e_n$, tenemos

$$R_K(G) = p_n R_K(G \cdot e_n - \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}) + (1 - p_n) R_K(G - e_n)$$

Aplicando la hipótesis inductiva al conjunto e_1, e_2, \dots, e_{n-1} de $G - e_n$ junto con el teorema de factorización simple (1.2.1), concluimos que

$$\begin{aligned} R_K(G - e_n) &= (1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_{n-1})) R_K(G \cdot e_n - \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}) \\ &\quad + (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_{n-1}) R_K(G - \{e_1, e_2, \dots, e_n\}) \end{aligned}$$

Sustituyendo y haciendo las cuentas, obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} R_K(G) &= (1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)) R_K(G \cdot e_n - \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}) \\ &\quad + (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n) R_K(G - \{e_1, e_2, \dots, e_n\}) \end{aligned}$$

Por el teorema de factorización simple (1.2.1), el lema está demostrado. \square

Los tres lemas anteriores constituyen lo que se conoce como reducciones simples; es decir, transformaciones del grafo aleatorio G que dejan invariante su K -Confiabilidad.

Estos lemas junto al teorema de factorización simple (1.2.1), motivan el algoritmo recursivo *FACT* para el cálculo de la K -Confiabilidad:

Entrada: $(G, \{p_e\}_{e \in E})$, K .

Salida: $R_K(G)$.

1. Aplique reducciones simples en serie, luego en paralelo y luego quite aristas K -irrelevantes.
2. Si el grafo resultante es un árbol, entonces, si es conexo devuelva el producto de las probabilidades, sino devuelva cero.
3. Si el grafo resultante no es un árbol, elija una arista e_i del grafo resultante.
4. Devuelva $R_K(G) = p_i R_{K_i}(G \cdot e_i) + (1 - p_i) R_K(G - e_i)$, siendo p_i la probabilidad de operación de e_i .

Este algoritmo es estudiado en [SC].

1.3. Polinomio de K -Confiabilidad

Considere un grafo aleatorio G_p cuyas aristas son variables aleatorias idéntica e independientemente distribuidas con distribución de Bernoulli con parámetro p :

$$e_1, e_2, \dots, e_n \sim Ber(p)$$

siendo e_1, e_2, \dots, e_n las aristas de G_p . Por el algoritmo recursivo *FACT* para el cálculo exacto de la K -Confiabilidad, tenemos que la función que toma el parámetro p y devuelve la K -Confiabilidad del grafo G_p cuyas aristas tienen probabilidad de operación p , es un polinomio en p ; es decir,

Definición 1.3.1. $R_K(p) \equiv R_K(G_p)$ es el polinomio de K -Confiabilidad de G .

El considerar grafos aleatorios con igual probabilidad de operación en sus aristas se debe a que permiten una descripción de su polinomio de K -Confiabilidad en términos del número de i - K -pathsets, esto es:

$$R_K(p) = \sum_{i=0}^n C_i^K p^i (1-p)^{n-i}$$

tal que C_i^K es el número de K -pathsets con i aristas operativas exactamente, siendo n el número de aristas de G .

En particular, conocer el polinomio de K -Confiabilidad es equivalente a conocer los números C_i^K . Todo K -minpath es un árbol de G que cubre K , también conocido como árbol de Steiner. Conociendo los números C_i^K , podemos resolver el siguiente problema: Dado un número b y un subconjunto de vértices K , determinar si existe algún árbol de Steiner con un número menor o igual a b de aristas. Simplemente observando que el primer número C_m^K no nulo coincide con el número de minpaths mínimos, es decir, árboles de Steiner mínimos (respecto al número de aristas), el problema se reduce a si $m \leq b$ o no. El problema anterior es *NP*-completo por lo que hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 1.3.1. *Calcular el polinomio de K -Confiabilidad es un problema *NP* completo.*

Capítulo 2

Formas Simples y Grafos de Monma Generalizados

2.1. Introducción al Teorema de Factorización

De aquí en más, grafo conexo significa arista-conexo.

Definición 2.1.1. Sea G un grafo y K un subconjunto de vértices. G es K -conexo si para todo par de vértices en K existe un camino en G que los conecta.

De forma equivalente, podemos decir que G es K -conexo si existe alguna componente conexa C_i de G tal que $K \subset Ver(C_i)$.

Definición 2.1.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo y considere un par de vértices v, w de V . Definamos la siguiente relación de equivalencia en V : $a \sim b$ si $a = b$ o $\{a, b\} = \{v, w\}$. Considere la función sobreyectiva canónica $\pi : V \rightarrow V/\sim$ tal que $\pi(a) = [a]_{\sim}$. Definimos la identificación de v con w en G como el grafo $G/(v = w)$ tal que

$$G/(v = w) = (V/\sim, E/(v = w))$$

siendo $E/(v = w) = \{ (\{\pi(a), \pi(b)\}, n) / (\{a, b\}, n) \in E \}$ (vea la Figura 2.2).

Observe que dada una arista $e = (\{v, w\}, n) \in E$ de un grafo $G = (V, E)$,

$$G \cdot e = (G - e)/(v = w)$$

Lema 2.1.1. Considere un grafo G . Sean K_1 y K_2 subconjuntos de vértices de subgrafos G_1 y G_2 de G respectivamente tales que $G = G_1 \cup G_2$ y $\{a, b\} = K_1 \cap K_2 = G_1 \cap G_2$ (vea la figura (2.1)). Sea $K = K_1 \cup K_2$. Bajo estas hipótesis, si G es K -conexo, entonces \hat{G}_1 es \hat{K}_1 -conexo y \hat{G}_2 es \hat{K}_2 -conexo, siendo \hat{G}_i y \hat{K}_i el grafo y el conjunto resultante de la identificación de los nodos a y b en el grafo y conjunto G_i y K_i respectivamente (vea la figura (2.2)).

Demostración: Sea k en K_1 . Existe un camino en G que conecta a k con a . Entonces, existe un subcamino en G_1 que conecta a k con a o b ; es decir, existe

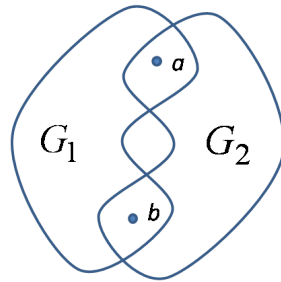


Figura 2.1: Estructura del grafo G

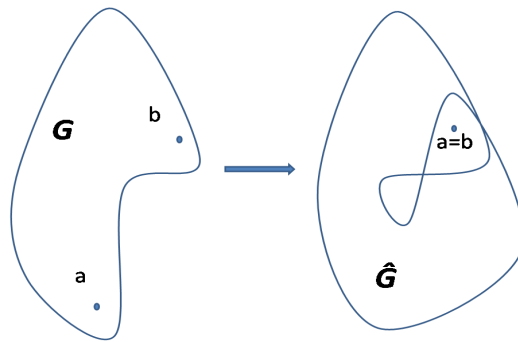


Figura 2.2: Identificación de vértices

un camino en \hat{G}_1 que conecta a k con $a = b$. Como esto vale para todos los k en \hat{K}_1 , tenemos que \hat{G}_1 es \hat{K}_1 -conexo. Análogamente, \hat{G}_2 es \hat{K}_2 -conexo. \square

Lema 2.1.2. *Considere un grafo G . Sean K_1 y K_2 subconjuntos de vértices de subgrafos G_1 y G_2 de G respectivamente tales que $G = G_1 \cup G_2$ y $\{a, b\} = K_1 \cap K_2 = G_1 \cap G_2$. Sea $K = K_1 \cup K_2$. Entonces, en la notación del lema anterior, G es K -conexo si y sólo si vale alguna de las siguientes afirmaciones:*

- i. G_1 es K_1 -conexo y \hat{G}_2 es \hat{K}_2 -conexo.
- ii. G_2 es K_2 -conexo y \hat{G}_1 es \hat{K}_1 -conexo.

Demostración: Veamos el directo. Por el lema anterior \hat{G}_1 es \hat{K}_1 -conexo y \hat{G}_2 es \hat{K}_2 -conexo. Supongamos que G_2 no es K_2 -conexo; es decir, existen vértices u, v en K_2 tales que no existe un camino en G_2 que los conecte.

Veamos que G_1 es K_1 -conexo. Supongamos por absurdo que no lo es; es decir, existen vértices x, y en K_1 tales que no existe un camino en G_1 que los conecte. Sin embargo, G es K -conexo por lo que existen caminos γ_1 y γ_2 en G que conectan a x con u y a y con v respectivamente. Como tanto γ_1 como γ_2 pasan por a o por b (pero no por el mismo punto), concluimos que a y b no están conectados en G ya que si estuviesen conectados por un camino en G , existiría un subcamino que los conecta por G_1 o por G_2 por lo que x e y o u y v estarían conectados. Esto último es absurdo ya que G es K -conexo y tanto a como b están en K . Así G_1 es K_1 -conexo.

Veamos el recíproco. Supongamos sin pérdida de generalidad que G_1 es K_1 -conexo y \hat{G}_2 es \hat{K}_2 -conexo. Veamos que G es K -conexo. Sean k_1 y k_2 en K . Si k_1 y k_2 están en K_1 , entonces existe un camino por G_1 que conecta a k_1 con k_2 y como $G_1 \subset G$ este camino está en G . Si k_1 está en K_1 y k_2 está en K_2 , entonces existe un camino en G_2 que conecta a k_2 con a o b . Supongamos sin pérdida de generalidad que lo conecta con a . Existe también un camino en G_1 que conecta a a con k_1 . La concatenación de estos dos caminos conecta a k_1 con k_2 por G . Análogo si k_1 está en K_2 y k_2 está en K_1 . Finalmente, si k_1 y k_2 están en K_2 , entonces existen caminos por G_2 que conectan tanto a k_1 como a k_2 con a o b . Si estos caminos se conectan en el mismo punto entonces k_1 y k_2 están conectados por $G_2 \subset G$, sino existe un camino por G_1 que conecta a a con b y la concatenación de estos tres caminos conecta a k_1 con k_2 por G . \square

Como corolario inmediato, tenemos la siguiente fórmula de factorización para la K -confiabilidad.

Teorema 2.1.3. *Considere un grafo G . Sean K_1 y K_2 subconjuntos de vértices de subgrafos G_1 y G_2 de G respectivamente tales que $G = G_1 \cup G_2$ y $\{a, b\} = K_1 \cap K_2 = G_1 \cap G_2$. Sea $K = K_1 \cup K_2$. Entonces (vea la figura (2.3)), en la notación del lema anterior,*

$$R_K(G) = R_{K_1}(G_1)R_{\hat{K}_2}(\hat{G}_2) + R_{\hat{K}_1}(\hat{G}_1)R_{K_2}(G_2) - R_{K_1}(G_1)R_{K_2}(G_2)$$

Demostración: Por el lema anterior 2.1.2, el conjunto de estados operativos del espacio muestral es la unión de los conjuntos de estados C_1 y C_2 que verifican

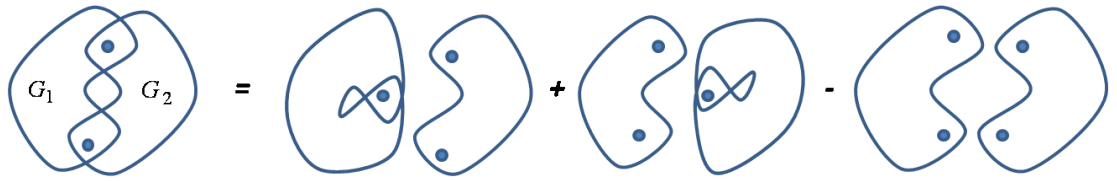


Figura 2.3: Ilustración del Teorema 2.1.3

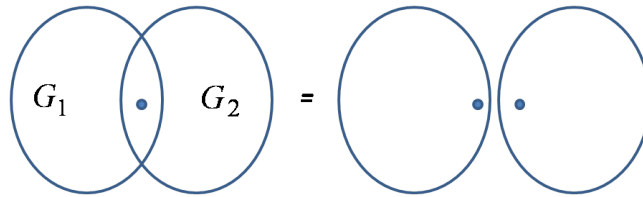


Figura 2.4: Ilustración del Teorema 2.1.4

los items *i* y *ii* del lema. La intersección de estos conjuntos es el conjunto de estados que verifica que G_1 es K_1 -conexo y G_2 es K_2 -conexo. De la identidad

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

y la independencia de los eventos sigue el resultado. \square

Teorema 2.1.4. *Considere un grafo G . Sean K_1 y K_2 subconjuntos de vértices de subgrafos G_1 y G_2 de G respectivamente tales que $G = G_1 \cup G_2$ y $\{a\} = K_1 \cap K_2 = G_1 \cap G_2$. Sea $K = K_1 \cup K_2$. Entonces (vea la figura (2.4)),*

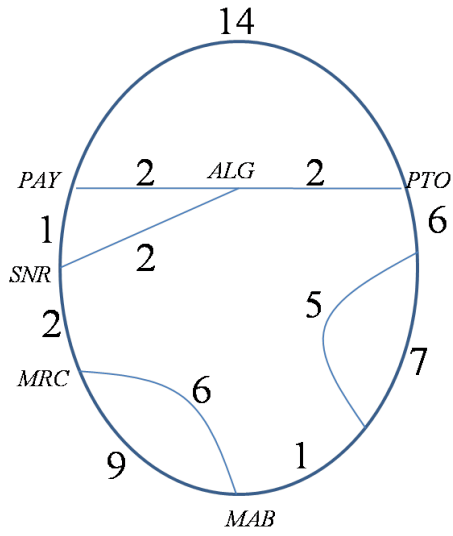
$$R_K(G) = R_{K_1}(G_1)R_{K_2}(G_2)$$

Demostración: Basta tomar $a = b$ en el teorema anterior. \square

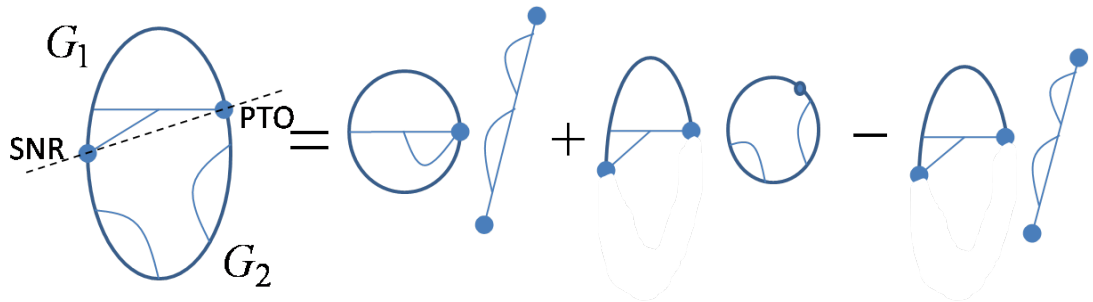
A modo de ejemplo, calculemos el polinomio de confiabilidad de la región Oeste de la red de ANTEL respecto a todos los nodos (caso All Terminal). Para esto conviene calcular el polinomio de confiabilidad respecto a todos los nodos de un grafo con vértices de grado 2 (ver definición 2.2.1) y n aristas, es decir, un anillo de longitud n , que denotaremos como $R(n)$. Por la definición 1.1.6, tenemos que:

$$R(n) = n(1 - p)p^{n-1} + p^n$$

A continuación, se puede ver de forma esquemática el grafo de la región Oeste de la Red de ANTEL junto a la cantidad de aristas de cada uno de sus arcos:



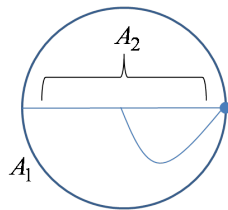
Factorizamos el grafo G como en la figura siguiente:



y observamos que, identificando al grafo con su polinomio de confiabilidad,

$$G_2 = p^9 R(15)R(12)$$

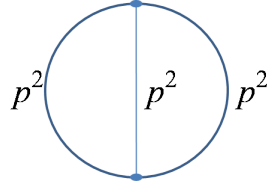
Factorizando el grafo \hat{G}_1 de la siguiente manera:



tenemos

$$\hat{G}_1 = p^2 R(4)R(14) + H R(15) - p^2 R(4)R(15)$$

siendo H el siguiente grafo:



Factorizando cualquiera de los arcos del grafo H de la figura anterior, tenemos que su polinomio es

$$H = p^2 R(2)R(2) + R(2)R(4) - p^2 R(4)$$

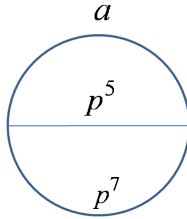
Factorizando ahora el arco entre los nodos PAY y ALG del grafo G_1 , tenemos que

$$G_1 = p^2 R(3)R(16) + R(2)R(19) - p^2 R(19)$$

Finalmente, factorizando el arco con seis aristas entre los nodos MRC y MAB , tenemos que

$$\hat{G}_2 = p^6 R(9)Aux(9) + R(6)Aux(18) - p^6 Aux(18)$$

siendo $Aux(n)$ el polinomio de confiabilidad del siguiente grafo auxiliar:



cuyo arco a tiene n aristas. Factorizando este arco, tenemos que

$$Aux(n) = p^n R(5)R(7) + R(n)R(12) - p^n R(12)$$

Juntando todas las piezas, tenemos finalmente el polinomio buscado:

$$R_{Au}(G) = -184580 p^{57} + 1005912 p^{56} - 2191715 p^{55} + 2386639 p^{54} - 1298933 p^{53} + 282678 p^{52}$$

Observe que el resultado final puede expresarse como sumas y productos de polinomios de confiabilidad de grafos lineales y de anillos. Éste es un resultado general y será probado en la sección siguiente.

2.2. Formas Simples

Definición 2.2.1. El grado de un vértice v de un grafo $G = (V, E)$ es el número de aristas adyacentes a él; es decir,

$$gr(v) = \# \{ (\{a, b\}, n) \in E / v \in \{a, b\} \}$$

Definición 2.2.2. Diremos que un grafo conexo G tiene forma simple si sus vértices tienen grado menor o igual a dos.

Pensando al grafo como un espacio topológico (es decir, olvidándonos por el momento de su estructura combinatoria), podemos pensar a una forma simple como una uno-variedad diferenciable conexa compacta con borde. Del teorema de clasificación de estas variedades (ver el apéndice de Milnor, [Mi]), concluimos que una forma simple es un grafo de tipo anillo o de tipo lineal.

Definición 2.2.3. Un arco A de un grafo G es un subgrafo de tipo lineal cuyos extremos (que pueden coincidir) son vértices de grado mayor o igual a tres (como vértices de G) y sus vértices interiores son de grado dos (como vértices de G).

Observe que las formas simples, por definición, no tienen arcos. Para el recíproco, tenemos el siguiente lema:

Lema 2.2.1. *Sea G un grafo conexo sin arcos. Entonces G es una forma simple o un árbol conexo con un único vértice de grado mayor o igual a tres.*

Demostración: Si todos los vértices de G tienen grado menor o igual a dos, entonces, por definición, G es una forma simple. Supongamos que existe un vértice v de G de grado mayor o igual a tres. Recorriendo algún camino partiendo de este vértice v , concluimos que todos sus vértices interiores tienen grado dos y que éste no puede conectarse consigo mismo ni con ningún otro camino partiendo del mismo vértice v ya que sino este camino sería un arco. Por la finitud del grafo, concluimos que este camino termina en un vértice de grado uno. Razonando análogamente para los otros caminos partiendo de v , tenemos el resultado. \square

Las formas simples son importantes en el cálculo exacto de la K -confiabilidad en el siguiente sentido:

Teorema 2.2.2. *La K -confiabilidad de un grafo G tal que K contiene a los vértices de grado mayor o igual a tres, puede expresarse como una suma cuyos términos son productos de confiabilidades de formas simples.*

Demostración: Hagamos inducción en el número de arcos de G . Supongamos que el teorema vale para un número menor o igual a $n - 1$ arcos. Tomando como G_1 un arco cualquiera A de G y como G_2 el grafo resultante de remover el arco A , es decir $G - A$, los teoremas de factorización (2.1.3) y (2.1.4) junto a la hipótesis inductiva muestran que el teorema vale para n arcos. Del lema anterior y el teorema de factorización (2.1.4), es claro que el teorema vale para $n = 0$, es decir, cuando G no tiene arcos. \square

La confiabilidad de una forma simple puede evaluarse por definición o aplicando los teoremas de factorización simple del capítulo uno. La descomposición de la confiabilidad de G en confiabilidades de formas simples no es única. En la sección siguiente se muestra una aplicación del teorema de descomposición (2.2.2) en el cálculo de la confiabilidad de un grafo de Monma generalizado.

Todos los polinomios de confiabilidad del Apéndice A fueron calculados usando el método del teorema de descomposición (2.2.2).

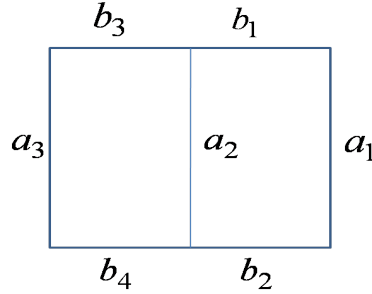


Figura 2.5: Grafo de Monma

2.3. Algoritmo Polinomial para la K-Confiabledad de Grafos de Monma Generalizados

Los grafos de Monma (ver Figura (2.6)) son de gran relevancia en el diseño robusto de redes de fibra óptica. En [MMP], Monma, Munson, y Pulleyblank demuestran el siguiente teorema:

Teorema 2.3.1. *Para cualquier conjunto de nodos V con función de distancia definida sobre $V \times V$, existe un grafo de costo mínimo $G=(V,E)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. *cada nodo en G tiene grado 2 o 3.*
2. *eliminando cualquier arista o par de aristas de G surge una arista puente en alguna de las componentes conexas resultantes.*

En el mismo trabajo demuestran además que el costo óptimo de las soluciones óptimas de los problemas “Minimum-weight 2-edge-connected spanning network” (denotado MW2ECSN) y “Minimum-weight 2-node-connected spanning network” (denotado MW2NCSN) son iguales.

Como corolario inmediato del Teorema mencionado, se tiene que en los problemas MW2ECSN y MW2NCSN de un grafo G con función de distancia definida en $V \times V$, existe un óptimo global que o bien es un ciclo o bien tiene como grafo nodo inducido un grafo como el de la Figura (2.5). A este tipo de grafos los llamaremos grafos de Monma en este contexto.

De aquí en más, en pos de aliviar la notación, se identificará al grafo G con su K -confiabledad $R_K(G)$. Dado un arco A (definido en la sección anterior) con un subconjunto de vértices de K que contiene a los extremos de A , conviene introducir la notación \widehat{A} para indicar el nuevo grafo y el nuevo subconjunto de vértices distinguidos que resulta de la identificación de los extremos de A .

Considere el grafo de Monma generalizado M_n de la Figura (2.6) tal que a_i y b_i son arcos y sea K un subconjunto de vértices tal que los extremos de a_i y b_i están en K . Tomando al arco $b_{2n-2}a_nb_{2n-3}$ como el grafo G_1 en el teorema

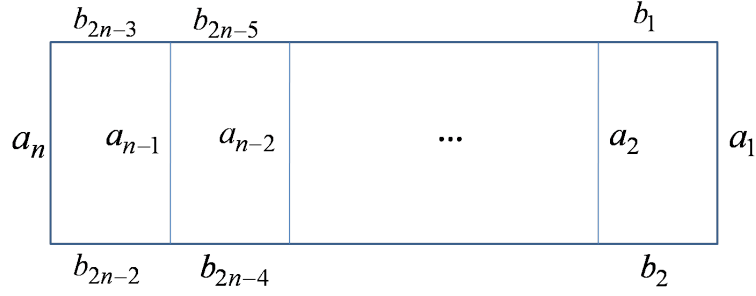


Figura 2.6: Grafo de Monma generalizado

de factorización (2.1.3), tenemos la siguiente relación

$$M_n = (\overbrace{b_{2n-2}a_n b_{2n-3} - b_{2n-2}a_n b_{2n-3}})M_{n-1} + b_{2n-2}a_n b_{2n-3} \overbrace{a_{n-1}} N_{n-1}$$

siendo N_m el grafo de Monma M_m con la arista a_m perfecta, es decir, probabilidad de operación igual a uno.

Podemos pensar a la relación anterior como una relación inductiva en los pares (M_n, N_n) , comenzando el cálculo en el primer par (M_2, N_2) de formas simples:

$$\begin{pmatrix} M_n \\ N_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{b_{2n-2}a_n b_{2n-3} - b_{2n-2}a_n b_{2n-3}} & b_{2n-2}a_n b_{2n-3} \overbrace{a_{n-1}} \\ \overbrace{b_{2n-2}b_{2n-3} - b_{2n-2}b_{2n-3}} & b_{2n-2}b_{2n-3} \overbrace{a_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} \\ N_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_2 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 a_2 b_1 a_1 \\ b_2 b_1 a_1 \end{pmatrix}$$

De esta manera, tenemos una descomposición de la K -confiabilidad del grafo M_n en confiabilidades de grafos simples como expresa el teorema (2.2.2). En particular, la inducción anterior determina un algoritmo de complejidad polinomial.

Otros algoritmos lineales o polinomiales se desarrollan para el cálculo exacto del polinomio de confiabilidad de grafos con ciertas restricciones, simetrías o recursividades. Por ejemplo vea [LMC], [SW] y [Ta].

Capítulo 3

Comportamiento Asintótico

3.1. Índices de Confiabilidad y Números de Conectividad

Considere un grafo G con aristas de igual confiabilidad p . En la práctica, las aristas tienen alta confiabilidad por lo que nos interesa la región $p \approx 1$ en el estudio de la confiabilidad de G . En general, cualitativamente las curvas de confiabilidad son como la de la Figura (3.1). En esta sección se muestra cómo aproximar el polinomio de confiabilidad en la región $p \approx 1$. Recuerde que en este escrito, grafo conexo significa arista-conexo.

Definición 3.1.1. Sea G un grafo con aristas de igual confiabilidad p y K un subconjunto de vértices. Sea $R_K(p) = R_K(G)$ el polinomio de confiabilidad de G . Considere el polinomio

$$B_K(p) = 1 - R_K(1 - p) = I_1^K p + I_2^K p^2 + \dots + I_n^K p^n$$

Los coeficientes I_m^K se denominan índices de confiabilidad.

Observe que la gráfica de B es la rotación de 180° con centro en $(1/2, 1/2)$ de la gráfica de R y debido a que $R_K(p)$ está entre cero y uno cuando p está entre cero y uno, lo mismo ocurre con B_K . En particular, el primer índice de confiabilidad no nulo es un número positivo. Más adelante veremos una demostración combinatoria de este hecho. Observe que cuanto más pequeño sea este número, mejor será la confiabilidad del grafo en la región $p \approx 1$.

Definición 3.1.2. Siguiendo la notación precedente, sea N_m^K el número de formas distintas de desconectar algún par de vértices de K extrayendo exactamente m aristas del grafo G . Los números N_m^K se denominan números de K -conectividad. Decimos que G es j - K -conexo si j es el primer índice tal que $N_j^K \neq 0$.

Es claro que si $N_m^K = 0$ entonces $N_j^K = 0$ para todo $j < m$. En particular, si G es j - K -conexo entonces $N_m^K \neq 0$ para todo $m \geq j$.

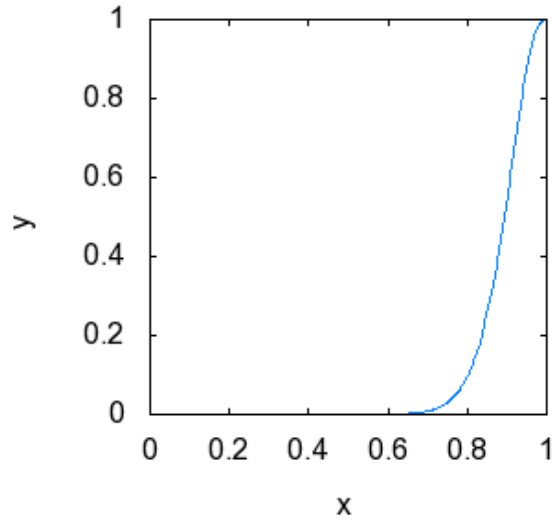


Figura 3.1: K es el conjunto de nodos de grado mayor o igual a tres de la región Oeste de la red de ANTEL

El siguiente lema muestra la relación entre los índices de confiabilidad y los números de conectividad.

Lema 3.1.1. *En la notación precedente, tenemos que:*

$$I_m^K = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i N_{m-i}^K \binom{n-m+i}{i}$$

Demostración: En pòs de aliviar la notación, se omitirá el sub o supraíndice K en esta demostración. Por la definición de $R(p)$, tenemos que $B(1-p) = 1 - R(p)$ es la probabilidad de desconexión de algún par de vértices de K dado que las aristas tienen confiabilidad p . Es claro entonces que

$$B(1-p) = 1 - R(p) = N_1(1-p)p^{n-1} + N_2(1-p)^2p^{n-2} + N_3(1-p)^3p^{n-3} + \dots + N_n(1-p)^n$$

por lo que

$$B(p) = 1 - R(1-p) = N_1p(1-p)^{n-1} + N_2p^2(1-p)^{n-2} + N_3p^3(1-p)^{n-3} + \dots + N_np^n$$

es decir

$$B(p) = N_1p + (N_2 - (n-1)N_1)p^2 + (N_3 - (n-2)N_2 + \binom{n-1}{2}N_1)p^3 + \dots$$

y tenemos el resultado. \square

Del lema se deducen relaciones interesantes entre los índices de confiabilidad y los números de conectividad:

$$\sum_{i=1}^n I_i^K = 1$$

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i I_i^K = \sum_{i=1}^n (-1)^i 2^{n-i} N_i^K$$

La primer relación era esperable ya que $R_K(0) = 0$ por lo que $B_K(1) = 1 = I_1^K + I_2^K + \dots$. Vemos también que el coeficiente del término de mayor grado de R_K está relacionado con la conectividad del grafo de la siguiente manera:

$$R_K(p) = (-1)^{n+1}(N_n^K - N_{n-1}^K + \dots)p^n + \dots$$

Teorema 3.1.2. *El comportamiento asintótico del polinomio de confiabilidad de un grafo G m - K -conexo cuando $p \rightarrow 1$ está determinado por su m -ésimo número de K -conectividad N_m^K :*

$$R_K(p) = 1 - N_m^K(1-p)^m + O_{m+1}(1-p)$$

Demostración: De las relaciones entre índices de confiabilidad y números de conectividad del lema anterior, tenemos que el primer índice de confiabilidad no nulo coincide con el primer número de K -conectividad no nulo, es decir, N_m^K . Así tenemos el comportamiento asintótico de $B_K(p)$ cuando $p \rightarrow 1$:

$$B_K(p) = N_j^K p^j + O(p^{j+1})$$

Por definición del polinomio $B_K(p)$, tenemos el resultado. \square

3.2. Estimación del Índice de Moore-Shannon

En la práctica, las redes de fibra óptica de área metropolitana se diseñan de forma que sean al menos 2-conexas. En general tienen una estructura anillada (anillos o ciclos que comparten nodos en común). Así es razonable suponer, siguiendo la teoría precedente, que

$$B_{All}(p) = I_2^{All} p^2 + I_3^{All} p^3 + \dots$$

En esta sección todos los números de conectividad e índices de confiabilidad son All-terminal y en pós de aliviar la notación, se omitirá el supraíndice *All* en ellos.

Definición 3.2.1. El índice de Moore-Shannon de G es el número estrictamente entre cero y uno (puede no existir) tal que

$$R_{All}(p_{MS}) = p_{MS}$$

Así tenemos que

$$p_{MS} = R_{All}(p_{MS}) = 1 - B_{All}(1 - p_{MS}) = 1 - I_2(1 - p_{MS})^2 - I_3(1 - p_{MS})^3 - \dots$$

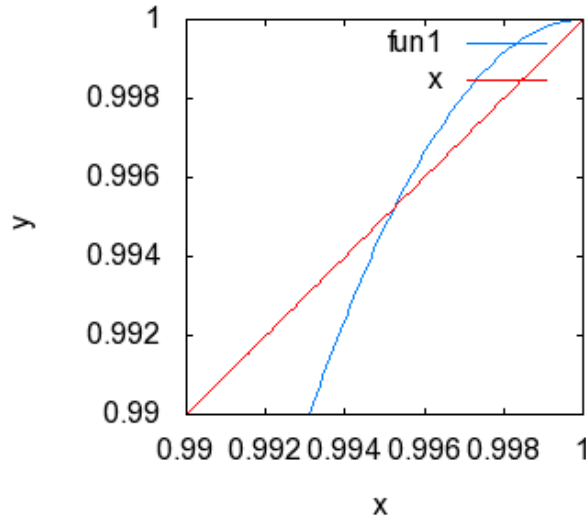


Figura 3.2: Índice de Moore-Shannon de la región Oeste de la red de ANTEL

por lo que

$$1 - p_{MS} = I_2(1 - p_{MS})^2 + I_3(1 - p_{MS})^3 + \dots$$

De esta manera, $1 - p_{MS} \approx x$ siendo x la solución de la ecuación

$$x = I_2x^2 + I_3x^3$$

que, debido a que $x \neq 0$, es solución también de la ecuación

$$I_3x^2 + I_2x - 1 = 0$$

por lo que tenemos la siguiente estimación del índice de Moore-Shannon:

$$p_{MS} \approx 1 - \frac{-I_2 + \sqrt{I_2^2 + 4I_3}}{2I_3}$$

En términos de los números de conectividad de la red tenemos, por el lema (3.1.1):

$$p_{MS} \approx 1 - \frac{-N_2 + \sqrt{N_2^2 + 4(N_3 - (n-2)N_2)}}{2(N_3 - (n-2)N_2)}$$

Haciendo el desarrollo de Taylor de la expresión anterior tenemos entonces la siguiente aproximación del índice de Moore-Shannon para redes al menos 2-conexas:

$$p_{MS} \approx 1 - \frac{1}{I_2} + \frac{I_3}{I_2^3} \left(1 + O\left(\frac{I_3}{I_2^2}\right)\right)$$

Debido al lema (3.1.1), si

$$\frac{|N_3 - (n-2)N_2|}{N_2^3} \ll 1$$

entonces cometemos el mismo error que en la aproximación anterior aproximando ahora por

$$p_{MS} \approx 1 - \frac{1}{N_2}$$

A modo de ejemplo, en el caso de la región Oeste de la red de ANTEL, por inspección exhaustiva tenemos que $N_2 = 212$ y $N_3 - (n-2)N_2 = -87$ ($n = 57$ es el número de aristas) por lo que podemos prescindir de N_3 en la aproximación. El error cometido en la aproximación es

$$|p_{MS} - p_{MS}^*| = 2,39500880898347b - 5$$

siendo p_{MS}^* la aproximación y p_{MS} el valor exacto del índice de Moore-Shannon, vea la Figura (3.2).

3.3. Comportamiento Asintótico de la Confiabilidad

Si bien la relación entre la K -Confiabilidad y la combinatoria de un grafo G justifica tomar sus aristas con confiabilidad uniforme, esto no se ajusta en general a la realidad ya que la confiabilidad de una arista e es

$$R(e) = A^d$$

siendo d la longitud de e y A una constante entre cero y uno característica de la física de e (fibra óptica en nuestro caso).

En la realidad, medimos la longitud de las aristas del grafo respecto a una unidad característica propia de las dimensiones del grafo; es decir, la escala natural del grafo (esta puede ser el decámetro o el Kilómetro). Podemos pensar entonces que una arista de longitud n unidades (cometiendo un error a lo sumo de una unidad característica) está compuesta por n aristas en serie de igual confiabilidad. Haciendo esto para cada arista, podemos aproximar al grafo G mediante el grafo homogéneo resultante \bar{G} ; es decir,

Definición 3.3.1. Sea $G = (V, E, (p_e)_{e \in E})$ un grafo aleatorio de confiabilidades no nulas en sus aristas y ε, A números reales tales que $\varepsilon > 0$ y $0 < A < 1$. Dada una arista e de G de confiabilidad p_e , definamos

$$n(e) = \left\lceil \frac{1 \ln p_e}{\varepsilon \ln A} \right\rceil$$

donde los paréntesis rectos denotan la función parte entera. Sea $\bar{G}_{\varepsilon, A}$ el grafo aleatorio resultante de sustituir cada arista e de G por $n(e)$ aristas conectadas en serie y asociarle a cada arista una variable aleatoria de Bernoulli de parámetro A^ε .

En la definición anterior, ε se interpreta como la unidad característica y A como la constante propia de la física de las aristas (consideramos la misma constante para todas las aristas) como fue explicado anteriormente.

Cometeremos el abuso de notación $Ver(G) \subset Ver(\bar{G}_{\varepsilon,A})$. Mediante este abuso, podemos calcular la all terminal confiabilidad de un grafo G como sigue:

Lema 3.3.1. *Sea $G = (V, E, (p_e)_{e \in E})$ un grafo aleatorio de confiabilidades no nulas en sus aristas y A un número real tal que $0 < A < 1$. Entonces,*

$$R_{All}(G) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{Ver(G)}(\bar{G}_{\varepsilon,A})$$

y el límite anterior no depende de A .

Demostración: Aplicando la reducción simple 1.2.3 a cada camino de $\bar{G}_{\varepsilon,A}$ entre dos vértices de G , obtenemos el grafo aleatorio $G_{\varepsilon,A}$ cuyo grafo (es decir, sólo su parte combinatoria) coincide con el grafo de G y sus probabilidades para cada arista e están relacionadas como sigue:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\ln p_e}{\ln A} - 1 < n(e) \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{\ln p_e}{\ln A}$$

$$(A^\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon} \frac{\ln p_e}{\ln A} - 1} > (A^\varepsilon)^{n(e)} \geq (A^\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon} \frac{\ln p_e}{\ln A}}$$

$$\frac{p_e}{A^\varepsilon} > (A^\varepsilon)^{n(e)} \geq p_e$$

por lo que concluimos que en el límite las probabilidades de cada arista de los respectivos grafos aleatorios $G_{\varepsilon,A}$ y G coinciden:

$$p_e = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A^\varepsilon)^{n(e)}$$

Observe que el límite no depende de A . Por definición, la K -Confiabilidad de un grafo es una función continua respecto a las confiabilidades de sus aristas por lo que tenemos el resultado. \square

Definición 3.3.2. Dado un grafo G , definimos el conjunto m -CutSets como el conjunto cuyos elementos son conjuntos de m aristas de G de forma tal que al removerlas del grafo G , éste resulta desconexo.

Considerando a la confiabilidad de un grafo como función de los logaritmos de las respectivas probabilidades de sus vértices, el siguiente teorema muestra el comportamiento asintótico de la confiabilidad cuando estos logaritmos tienden a cero y su relación con la conexidad del grafo.

Teorema 3.3.2. *Sea $G = (V, E, (p_e)_{e \in E})$ un grafo aleatorio m -conexo de confiabilidades no nulas en sus aristas. Considerando a la confiabilidad de G como función de las variables $(\ln p_e)_{e \in E}$, tenemos que su serie de Taylor alrededor de $\mathbf{0}$ es:*

$$R_{All}(G) = 1 - (-1)^m \sum_{\{e_1, \dots, e_m\} \in m\text{-CutSets}} (\ln p_{e_1})(\ln p_{e_2}) \dots (\ln p_{e_m}) + \dots$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de mayor grado.

Demostración: Sean ε, A números reales tales que $\varepsilon > 0$ y $0 < A < 1$. Debido a que los vértices de grado mayor o igual a tres de $\tilde{G}_{\varepsilon, A}$ están contenidos en $Ver(G)$, por inspección tenemos entonces que

$$\bar{N}_m^{Ver(G)} = \sum_{\{e_1, \dots, e_m\} \in m-CutSets} n(e_1)n(e_2) \dots n(e_m)$$

y que $\bar{N}_i^{Ver(G)}$ es un polinomio de grado menor o igual a i en las variables $((n(e))_{e \in E})$, siendo $\bar{N}_i^{Ver(G)}$ el i -ésimo número de $Ver(G)$ -conectividad del grafo homogéneo $\tilde{G}_{\varepsilon, A}$. Observe que debido a que G es m -conexo, $\tilde{G}_{\varepsilon, A}$ es m - $Ver(G)$ -conexo. Observe también que el número de aristas del grafo homogéneo $\tilde{G}_{\varepsilon, A}$ es la suma de los números $n(e)$.

Recuerde que, debido al lema 3.1.1, la K -confiabilidad de un grafo homogéneo H con n aristas y confiabilidad p en cada arista es:

$$R_K(p) = 1 - N_1(1-p) - (N_2 - (n-1)N_1)(1-p)^2 - \left(N_3 - (n-2)N_2 + \binom{n-1}{2} N_1 \right) (1-p)^3 + \dots$$

siendo N_i el i -ésimo número de K -conectividad del grafo homogéneo H . De esta manera, haciendo las siguientes sustituciones en la expresión anterior:

$$\begin{array}{lcl} p & \dashrightarrow & A^\varepsilon \\ K & \dashrightarrow & Ver(G) \\ N_i & \dashrightarrow & \bar{N}_i^{Ver(G)} \\ n & \dashrightarrow & \sum_{e \in E} n(e) \end{array}$$

tenemos que:

$$R_{Ver(G)}(\tilde{G}_{\varepsilon, A}) = 1 - (1 - A^\varepsilon)^m \sum_{\{e_1, \dots, e_m\} \in m-CutSets} n(e_1) \dots n(e_m) - \sum_{j=m+1} (1 - A^\varepsilon)^j P_j((n(e))_{e \in E})$$

donde cada P_j es un polinomio de grado menor o igual j en las variables $(n(e))_{e \in E}$.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1 - A^\varepsilon}{\varepsilon \ln A} \right)^m \sum_{\{e_1, \dots, e_m\} \in m-CutSets} (\ln p_{e_1}) \dots (\ln p_{e_m}) + \dots \\ & < (1 - A^\varepsilon)^m \sum_{\{e_1, \dots, e_m\} \in m-CutSets} n(e_1) \dots n(e_m) \\ & \leq \left(\frac{1 - A^\varepsilon}{\varepsilon \ln A} \right)^m \sum_{\{e_1, \dots, e_m\} \in m-CutSets} (\ln p_{e_1}) \dots (\ln p_{e_m}) \end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos denotan términos que tienden a cero cuando ε tiende a cero. Debido a que

$$\frac{1 - A^\varepsilon}{\varepsilon \ln A} \longrightarrow -1$$

cuando ε tiende a cero, tenemos que

$$(1-A^\varepsilon)^m \sum_{\{e_1, \dots, e_m\} \in m\text{-CutSets}} n(e_1) \dots n(e_m) \longrightarrow (-1)^m \sum_{\{e_1, \dots, e_m\} \in m\text{-CutSets}} (\ln p_{e_1}) \dots (\ln p_{e_m})$$

cuando ε tiende a cero. Por un argumento similar al anterior, concluimos que el límite de $(1 - A^\varepsilon)^j P_j((n(e))_{e \in E})$ cuando ε tiende a cero es un polinomio homogéneo de grado $j > m$ en las variables $(\ln p_e)_{e \in E}$ ya que los términos de grado menor a j tienden a cero. Por el lema anterior concluimos el resultado. \square

El teorema anterior puede utilizarse para estimar la confiabilidad de una red m -conexa de la siguiente manera. Asumiendo que: la constante A , constante propia de la física de la arista, es la misma para cada arista, que conocemos la matriz de distancias entre nodos y que conocemos (calculando exhaustivamente) el conjunto de los m -CutSets de la red, entonces, recordando que la confiabilidad de cada arista es $p = A^d$ siendo d el largo de la arista, tenemos la siguiente estimación de la confiabilidad:

$$R_{All}(G) \approx 1 - (-\ln A)^m \sum_{\{e_1, \dots, e_m\} \in m\text{-CutSets}} d_{e_1} d_{e_2} \dots d_{e_m}$$

siendo d_e la longitud de la arista e . Cuanto más próximo a cero sean las cantidades $d \ln A$, mejor será la aproximación.

Debido a que $\ln p = p - 1 + O_2(p - 1)$ tenemos que en el caso particular de un grafo homogéneo, el teorema anterior se reduce al teorema 3.1.2 en el caso de la All-terminal confiabilidad. De hecho, por el mismo argumento podemos enunciar el teorema anterior de la siguiente manera:

Teorema 3.3.3. *Sea $G = (V, E, (p_e)_{e \in E})$ un grafo aleatorio m -conexo de confiabilidades no nulas en sus aristas. Considerando a la confiabilidad de G como función de las variables $(p_e)_{e \in E}$, tenemos que su serie de Taylor alrededor de $\mathbf{1}$ es:*

$$R_{All}(G) = 1 - \sum_{\{e_1, \dots, e_m\} \in m\text{-CutSets}} (1 - p_{e_1})(1 - p_{e_2}) \dots (1 - p_{e_m}) + \dots$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de mayor grado.

Es decir, escribiendo el polinomio obtenido por el algoritmo *FACT* para el cálculo exacto de la confiabilidad en las variables $(1 - p_e)_{e \in E}$, obtenemos un polinomio cuyos primeros términos son los de la expresión anterior.

Capítulo 4

Caso de Estudio: Red de ANTEL

4.1. Regiones Este y Oeste de la Red de ANTEL

Los siguientes resultados teóricos están fuertemente motivados por la red de ANTEL. Se usará fuertemente el teorema de factorización previo junto a los índices de confiabilidad discutidos anteriormente. En esta sección, confiabilidad se refiere a All-terminal confiabilidad.

Considere un grafo G como en el lema (2.1.1) del capítulo dos, de forma tal que los grafos \hat{G}_1 y \hat{G}_2 resultantes sean al menos 2-conexos.

Estudiemos la confiabilidad de G en la región $p \approx 1$. Por medio del teorema de factorización (2.1.3), tenemos que

$$R(p) = \hat{R}_1(p)R_2(p) + R_1(p)\hat{R}_2(p) - R_1(p)R_2(p)$$

siendo R la confiabilidad del grafo G , R_1 y R_2 las confiabilidades de los grafos G_1 y G_2 y \hat{R}_1 y \hat{R}_2 las confiabilidades de los grafos \hat{G}_1 y \hat{G}_2 . Así, desarrollando hasta segundo orden la expresión anterior en sus índices de confiabilidad, tenemos que

$$R(1-p) = (1 - \hat{H}_2 p^2 \dots)(1 - J_1 p - J_2 p^2 \dots) + (1 - H_1 p - H_2 p^2 \dots)(1 - \hat{J}_2 p^2 \dots) - (1 - H_1 p - H_2 p^2 \dots)(1 - J_1 p - J_2 p^2 \dots)$$

es decir

$$B(p) = 1 - R(1-p) = (\hat{H}_2 + \hat{J}_2 + H_1 J_1) p^2 + \dots$$

por lo que G es al menos 2-conexo y además

$$I_2 = \hat{H}_2 + \hat{J}_2 + H_1 J_1$$

Un caso particular de la expresión anterior es cuando G_1 o G_2 es 2-conexo, es decir, cuando $H_1 = 0$ o $J_1 = 0$. En este caso, mediante la relación entre índices

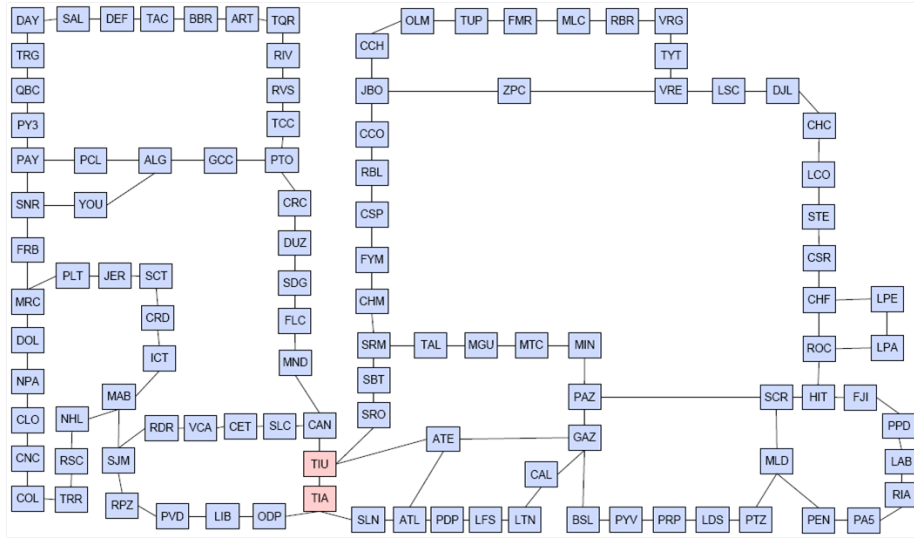


Figura 4.1: Red de ANTEL

de confiabilidad y números de conectividad del lema (3.1.1), tenemos que

$$N_2^G = \hat{N}_2^1 + \hat{N}_2^2$$

siendo N_2^G el segundo número de conectividad de G y \hat{N}_2^i el segundo número de conectividad de \hat{G}_i .

En el caso particular de la red de ANTEL, Figura (4.1), entre varias descomposiciones que admite la red, por convención tomamos los nodos TIU y TIA como los nodos a y b y definimos en la manera obvia las regiones (subgrafos) Este y Oeste como los grafos G_1 y G_2 . Convenimos también, en este escrito, pensar a la arista que conecta a TIU con TIA como una arista del subgrafo Este (vea las figuras (4.2) y (4.3)). En esta descomposición, a diferencia de la región Este, la región Oeste es 2-conexa por lo que vale la expresión anterior y tenemos que:

$$N_2^{ANTEL} = \hat{N}_2^E + \hat{N}_2^W$$

siendo N_2^{ANTEL} el segundo número de conectividad de la red de ANTEL (all terminal) y \hat{N}_2^E y \hat{N}_2^W el segundo número de conectividad (all terminal) de las regiones Este y Oeste respectivamente con sus nodos de interconexión identificados.

En particular, tenemos la siguiente estimación del índice de Moore-Shannon de la red de ANTEL:

$$p_{MS}^{ANTEL} \approx 1 - \frac{1}{\hat{N}_2^E + \hat{N}_2^W}$$

Para la red de ANTEL, mediante inspección exhaustiva, tenemos que $\hat{N}_2^E = 191$ mientras que $\hat{N}_2^W = 206$ por lo que $N_2^{ANTEL} = 397$ lo que nos da una estimación del índice de Moore-Shannon:

$$p_{MS}^{ANTEL} \approx 0,997481108$$

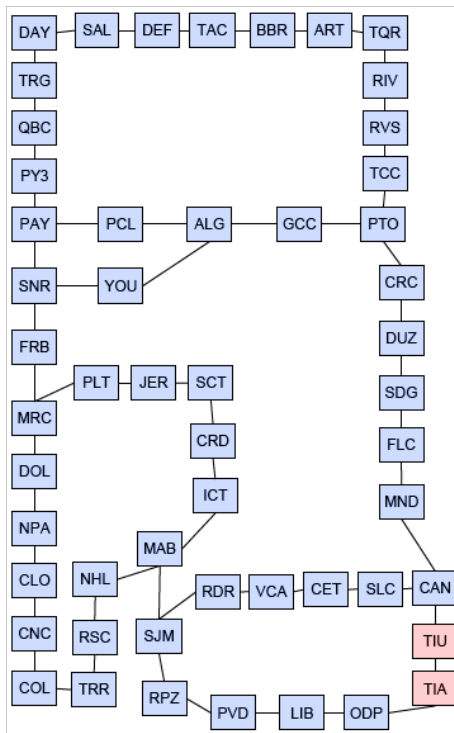


Figura 4.2: Región Oeste de la red de ANTEL

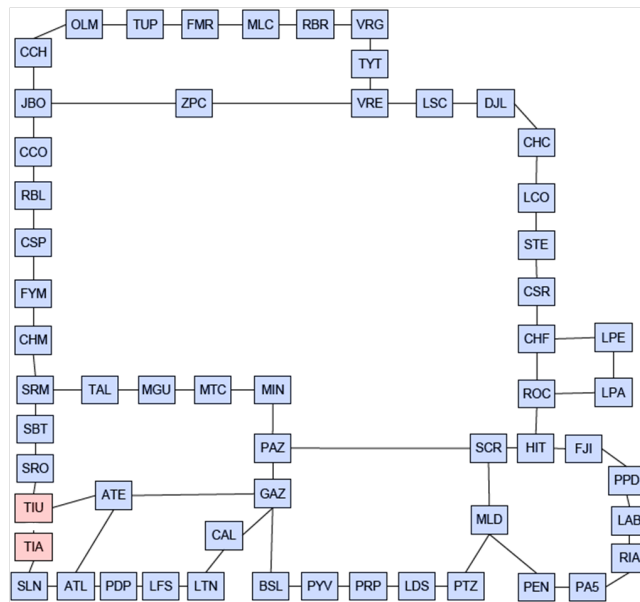


Figura 4.3: Región Este de la red de ANTEL

4.2. Diseño de Mejoras respecto al Comportamiento Asintótico

Debido a que la red de ANTEL es 2-conexa, por el teorema 3.1.2 el comportamiento asintótico de su polinomio de confiabilidad está determinado por su segundo número de conectividad. Estudiemos cómo afecta a este número la interconexión de nuevas aristas en la red.

Definición 4.2.1. Decimos que $\{a, b\}$ es un par de K -desconexión de G si a y b son aristas del grafo G tales que al ser removidas desconectan algún par de nodos de K . Denotamos el conjunto de los pares de K -desconexión de G como P_G^K .

Es claro de las definiciones que

$$N_2^K = \#P_G^K$$

Lema 4.2.1. $N_2^{All} = N_2^{gr \geq 3} + \sum_{A \in \text{Arcos}} \binom{l_A}{2}$ siendo l_A el largo del arco A y la suma es en los arcos de G .

Demostración: Sea v un nodo de G perteneciente a algún arco A y que dista de los extremos de este arco en a y b aristas. Entonces tenemos que:

$$N_2^{gr \geq 3 \cup \{v\}} = N_2^{gr \geq 3} + ab$$

siendo $N_2^{gr \geq 3}$ el segundo número de conectividad respecto a los nodos de grado mayor o igual a tres y $N_2^{gr \geq 3 \cup \{v\}}$ el segundo número de conectividad respecto a los nodos de grado mayor o igual a tres unión el vértice v . Haciendo uso de la relación

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} + ab = \binom{a+b}{2}$$

tenemos que

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} + N_2^{gr \geq 3 \cup \{v\}} = \binom{a+b}{2} + N_2^{gr \geq 3} = \binom{l_A}{2} + N_2^{gr \geq 3}$$

Inductivamente, agregando todos los nodos restantes del arco A uno por uno, tenemos que

$$N_2^{gr \geq 3 \cup \{v \in A\}} = \binom{l_A}{2} + N_2^{gr \geq 3}$$

siendo $N_2^{gr \geq 3 \cup \{v \in A\}}$ el segundo número de conectividad respecto a los nodos de grado mayor o igual a tres unión los vértices del arco A . Repitiendo el argumento para el resto de los arcos de G , tenemos el resultado. \square

Lema 4.2.2. Sea G un grafo 2-conexo y sea \overline{G} el grafo resultante de conectar un arco A en G entre nodos de G . Entonces

$$\overline{N}_2^{gr \geq 3} \leq N_2^{gr \geq 3}$$

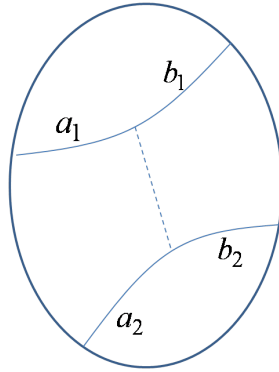


Figura 4.4: Mejora de la confiabilidad de la red conectando una arista

Demostración: Debido a que G es 2-conexo, ningún par de desconexión de \overline{G} tiene alguna arista en el nuevo arco A por lo que

$$P_{\overline{G}}^{gr \geq 3} \subset P_G^{gr \geq 3}$$

lo que, tomando cardinales, implica el resultado. \square

Llegamos así al resultado central de esta sección.

Teorema 4.2.3. *Sea G un grafo 2-conexo y sea \overline{G} el grafo resultante de conectar una arista A en G entre nodos de G . Entonces*

$$\overline{N}_2^{All} \leq N_2^{All}$$

Demostración: Supongamos que la arista A está conectada en nodos interiores de arcos distintos de G . Sean a_1, b_1 y a_2, b_2 las distancias en aristas a los extremos de los arcos a los que está conectada la arista A (ver Figura (4.4)). Entonces, haciendo uso del lema anterior, tenemos

$$\overline{N}_2^{All} - N_2^{All} = \overline{N}_2^{gr \geq 3} - N_2^{gr \geq 3} - \sum_i a_i b_i \leq 0$$

lo que demuestra el resultado. Las otras posibilidades en la interconexión de la arista A con G se demuestran análogamente. \square

Cabe destacar, que para el cálculo de mejoras respecto a la confiabilidad, debido al lema (4.2.1), tenemos la siguiente fórmula:

$$\Delta N_2^{All} = \Delta N_2^{gr \geq 3} - \sum_i a_i b_i \leq 0$$

siendo a_1, b_1 y a_2, b_2 las distancias en aristas a los extremos de los arcos a los que está conectada la nueva arista responsable de la mejora que se quiere cuantificar (ver Figura (4.4)). El valor de la fórmula anterior es que distingue la contribución local de la contribución global en la mejora de la confiabilidad, distinción posible en la región $p \approx 1$. De la fórmula anterior, también vemos que una vez elegido un par de arcos para conectar una nueva arista, los mejores

vértices para hacerlo son los del medio de cada arco (o los más cercanos a la mitad del arco), resultado cualitativo no trivial.

Para la región Oeste (ver Figura (A.1)), agregando una arista, tenemos las siguientes mejoras:

Mejora	ΔN_2^{All}
SCT-YOU	-24
COL-LIB	-34
SCT-VCA	-23
YOU-VCA	-25

Agregando dos aristas, una de las maneras de obtener el valor más alto de posibles mejoras es con la siguiente conexión:

Mejoras	ΔN_2^{All}
SCT-YOU, COL-LIB	-56

Análogamente, para la región Este (ver Figura (A.2)), agregando una arista, tenemos las siguientes mejoras:

Mejora	ΔN_2^{All}
MIN-ZPC	-53
MGU-ZPC	-55
ZPC-CHF	-50
CHF-HIT	-13

Agregando dos aristas, una de las maneras de obtener el valor más alto de posibles mejoras es con la siguiente conexión:

Mejoras	ΔN_2^{All}
MGU-ZPC, HIT-MIN	-64

Sin embargo, la mejora anterior no es muy realista respecto a la longitud de las líneas requeridas. Una mejora menos confiable pero más realista es:

Mejoras	ΔN_2^{All}
MIN-ZPC, CHF-HIT	-60

Capítulo 5

Teoría de Factorización

5.1. Combinatoria del Problema

En todo el capítulo G_1 , G_2 y G serán grafos con subconjuntos distinguidos de vértices K_1 , K_2 y K respectivamente tales que $G = G_1 \cup G_2$, $K = K_1 \cup K_2$ y

$$\{k_1, k_2, \dots, k_n\} = K_1 \cap K_2 = G_1 \cap G_2$$

También supondremos en todo el capítulo que para cada vértice $v \in K$ existe un camino en G que conecta a v con algún k_i .

Lema 5.1.1. G es K -conexo si y sólo si G es $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ -conexo.

Demostración. El directo es trivial. Para el recíproco, sean a y b vértices en K . Existen caminos P_a y P_b que conectan a a y b con k_i y k_j respectivamente. Como G es $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ -conexo, existe un camino P que conecta a k_i con k_j . El camino $P_a \cup P \cup P_b$ conecta entonces a a con b . \square

El lema anterior motiva la siguiente definición.

Definición 5.1.1. Definimos la siguiente relación de equivalencia, $k_i \sim^l k_j$ si existe un camino en G_l que conecta a k_i con k_j , $l = 1, 2$. Llamaremos estado de conectividad a una partición de $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ y definimos el estado de conectividad de G_l como

$$\mathcal{C}_l = \{k_1, k_2, \dots, k_n\} / \sim^l$$

Denotaremos \mathcal{C} al conjunto de estados de conectividad. Observe que todo estado de conectividad \mathcal{C} determina una única relación de equivalencia $\sim_{\mathcal{C}}$ (dos elementos son equivalentes si pertenecen a la misma clase) de forma tal que las correspondencias son inversas; es decir, podemos identificar estados de conectividad con relaciones de equivalencia en $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. La Figura 5.1 muestra con un ejemplo dos formas útiles de representar a los estados de conectividad.

Definición 5.1.2. Sea \mathcal{A} un estado de conectividad. Definimos el grafo que resulta de la identificación de los vértices $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ de $G_l = (V, E)$ en las

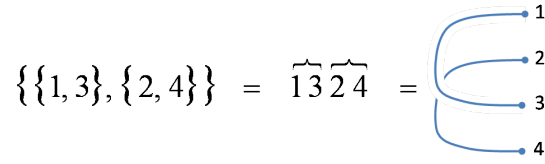


Figura 5.1: Estado de Conectividad

clases de \mathcal{A} como el grafo $G_l^{\mathcal{A}} = (V / \sim_{\mathcal{A}}, E^{\mathcal{A}})$, siendo

$$E^{\mathcal{A}} = \{ (\{\pi(a), \pi(b)\}, n) / (\{a, b\}, n) \in E \}$$

y $K_l^{\mathcal{A}} = \pi(K_l)$ el conjunto de vértices distinguidos del nuevo grafo donde

$$\pi : V \rightarrow V / \sim_{\mathcal{A}}$$

es la función sobreyectiva canónica tal que $\pi(a) = [a]_{\sim_{\mathcal{A}}}$.

Definición 5.1.3. El conjunto de estados de conectividad de G es $Con \times Con$ y $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ es el estado de conectividad de G .

Considere a G como un grafo aleatorio cuyas aristas tienen confiabilidad de operación independientes con distribución de Bernoulli.

Definición 5.1.4.

$$\begin{aligned} P_l(\mathcal{C}) &= P(\mathcal{C} = \mathcal{C}_l) \\ P_G(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= P((\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)) \end{aligned}$$

siendo \mathcal{A}, \mathcal{B} y \mathcal{C} estados de conectividad y $l = 1, 2$.

Los estados de conectividad forman una partición del espacio muestral de estados de G_l , $l = 1, 2$; es decir,

$$1 = \sum_{\mathcal{C} \in Con} P_l(\mathcal{C})$$

Más aún, los estados de conectividad de G_1 son independientes de los estados de conectividad de G_2 por lo que $Con \times Con$ es una partición del espacio muestral de estados de G y además

$$P_G(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = P_1(\mathcal{A})P_2(\mathcal{B})$$

Definición 5.1.5. Diremos que un estado de conectividad $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de G es conexo si

$$\{k_1, k_2, \dots, k_n\} / \sim = \{\{k_1, k_2, \dots, k_n\}\}$$

siendo \sim la relación de equivalencia: $k_i \sim k_j$ si $k_i \sim_{\mathcal{A}} k_j$ o $k_i \sim_{\mathcal{B}} k_j$.



Figura 5.2: Estados de Conectividad de G conexos

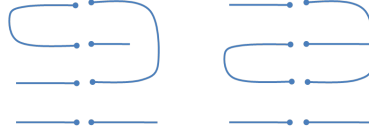


Figura 5.3: Estados de Conectividad de G no conexos

Las Figuras 5.2 y 5.3 muestran ejemplos de estados de conectividad de G . De esta manera tenemos que la K -confiabilidad de G está dada por

$$R(G) = \sum_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ conexo}} P_G(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sum_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ conexo}} P_1(\mathcal{A})P_2(\mathcal{B})$$

Todas las consideraciones anteriores sugieren la siguiente construcción. Sea V el \mathbb{Q} -espacio vectorial con base los estados de conectividad y considere el funcional que resulta de la extensión lineal de P_l que, abusando de la notación, lo denotaremos con el mismo nombre P_l . Así tenemos el funcional

$$P_1 \otimes P_2 : V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$$

y junto con él, la siguiente expresión para la confiabilidad

$$R(G) = P_1 \otimes P_2 \left(\sum_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ conexo}} \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \right)$$

La expresión anterior convierte el problema original de la factorización, en principio probabilístico, en un problema combinatorio. En concreto, el problema a resolver ahora es el de expresar el vector R de $V \otimes V$

$$R = \sum_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ conexo}} \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

en términos de todas las identificaciones posibles de G_1 y G_2 en los vértices $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. Para esto, definamos $R_{\mathcal{A}}(G_l)$ como la $K_l^{\mathcal{A}}$ -confiabilidad del grafo $G_l^{\mathcal{A}}$ que resulta de la identificación de los vértices $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ de G_l en las clases de \mathcal{A} , siendo $K_l^{\mathcal{A}}$ el conjunto de vértices distinguidos resultante.

Lema 5.1.2. $R_{\mathcal{A}}(G_l) = \sum_{\mathcal{B} / (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ conexo}} P_l(\mathcal{B})$

Demostración: Basta observar que $G_l^{\mathcal{A}}$ es $K_l^{\mathcal{A}}$ -conexo si y sólo si \mathcal{C}_l verifica que $(\mathcal{A}, \mathcal{C}_l)$ es conexo por lo que

$$R_{\mathcal{A}}(G_l) = P(\mathcal{C}_l \in \{\mathcal{B} / (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ conexo}\})$$

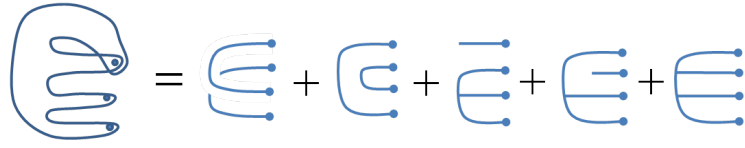


Figura 5.4

y debido a que los estados de conectividad forman una partición del espacio muestral de estados de G_l , tenemos el resultado. \square

Así, mediante el funcional $P_l : V \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos que

$$R_{\mathcal{A}}(G_l) = P_l \left(\sum_{\mathcal{B} / (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ conexo}} \mathcal{B} \right)$$

Definiendo el vector de V (ver Figura 5.4)

$$R_{\mathcal{A}} = \sum_{\mathcal{B} / (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ conexo}} \mathcal{B}$$

hemos convertido el problema original en el siguiente problema combinatorio: Expresar el vector R de $V \otimes V$ en términos de los vectores $R_{\mathcal{A}}$ de V .

5.2. Teorema de Factorización

Siguiendo con las definiciones y notaciones de la sección anterior, ordenando los estados de conectividad tenemos entonces que

$$R = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \mathcal{A}_i \otimes \mathcal{A}_j$$

siendo $A = (a_{ij})$ la matriz de conexidad con entrada $a_{ij} = 1$ si $(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ es conexo y $a_{ij} = 0$ en caso contrario. Considere el operador lineal $T : V \rightarrow V$ tal que $T(\mathcal{A}) = R_{\mathcal{A}}$.

Lema 5.2.1. *La matriz de conexidad es simétrica y es la matriz asociada al operador T en la base Con .*

Demostración: Por definición, A es simétrica. Tomando coordenadas respecto a la base Con tenemos

$$[T(\mathcal{A}_j)]_{Con} = [R_{\mathcal{A}_j}]_{Con} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$$

por lo que

$$[T]_{Con} = (a_{ij})$$

\square

El siguiente lema es nada trivial y toda la sección siguiente está dedicada a su demostración (Teorema 5.3.7) y cálculo (Teorema 5.3.9).

Lema 5.2.2. *La matriz de conexidad A es invertible en $M_m(\mathbb{Q})$.*

Observación 5.2.1. La matriz de conexidad A no es invertible en $M_m(\mathbb{Z})$ si $n > 2$ y por el Lema 5.2.1, el Teorema 5.3.10 de la sección siguiente mide cuán lejos está de serlo.

Tenemos así el teorema de factorización buscado.

Teorema 5.2.3. *Sea $(b_{ij}) = A^{-1}$ siendo A la matriz de conexidad. Entonces*

$$R = \sum_{i,j=1}^m b_{ij} R_{\mathcal{A}_i} \otimes R_{\mathcal{A}_j}$$

y la expresión anterior no depende del orden elegido en Con .

Demostración: Debido al lema 5.2.1, tenemos que

$$\mathcal{A}_j = \sum b_{ij} R_{\mathcal{A}_j}$$

por lo que

$$R = \sum_{h,i,j,k=1}^m a_{ij} b_{ki} b_{hj} R_{\mathcal{A}_k} \otimes R_{\mathcal{A}_h}$$

Como (a_{ij}) y (b_{ij}) son inversas

$$\sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ij} = \delta_{kj}$$

y tenemos que

$$R = \sum_{h,j,k=1}^m \delta_{kj} b_{hj} R_{\mathcal{A}_k} \otimes R_{\mathcal{A}_h} = \sum_{h,k=1}^m b_{hk} R_{\mathcal{A}_k} \otimes R_{\mathcal{A}_h}$$

Finalmente, debido a que A es simétrica, su inversa también lo es y tenemos que

$$R = \sum_{h,k=1}^m b_{kh} R_{\mathcal{A}_k} \otimes R_{\mathcal{A}_h}$$

Resta ver que la expresión es independiente del orden elegido en Con . Para esto, basta hacer una formulación intrínseca y no relativa a ningún orden en Con ; es decir,

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\mathcal{A} \in Con} \mathcal{A} \otimes R_{\mathcal{A}} \\ &= \sum_{\mathcal{A} \in Con} T^{-1}(T(\mathcal{A})) \otimes R_{\mathcal{A}} \\ &= \sum_{\mathcal{A} \in Con} T^{-1}(R_{\mathcal{A}}) \otimes R_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

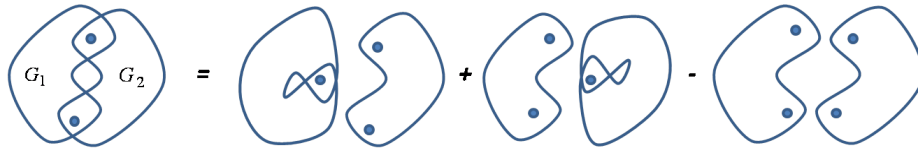


Figura 5.5

La formulación anterior es la expresión del teorema independiente del orden en la base. Fijando un orden y tomando coordenadas tenemos la expresión del teorema. \square

La expresión del teorema anterior es la versión combinatoria del teorema de factorización. Para obtener su versión probabilista basta aplicar, como fue explicado en la sección anterior, el funcional $P_1 \otimes P_2$; es decir,

Corolario 5.2.4. *En las hipótesis y notaciones precedentes, la confiabilidad de G se factoriza como*

$$R(G) = \sum_{i,j=1}^m b_{ij} R_{A_i}(G_1) R_{A_j}(G_2)$$

Veamos que la teoría reproduce el teorema de factorización del capítulo 2 (Teorema 2.1.3). Ordenando la base Con de la siguiente manera:

$$Con = \{12, \widehat{12}\}$$

tenemos que la matriz de conexidad es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$R = R_{\widehat{12}} \otimes R_{12} + R_{12} \otimes R_{\widehat{12}} - R_{12} \otimes R_{12}$$

factorización que se ilustra en la Figura 5.5.

Veamos el caso $n = 3$. Ordenando la base Con de la siguiente manera:

$$Con = \{123, 1 \widehat{23}, \widehat{13} 2, \widehat{12} 3, \widehat{123}\}$$

tenemos que la matriz de conexidad es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el caso $n = 4$, ordenando la base Con de la siguiente manera:

$$Con = \{1234, \overbrace{12\ 34}, \overbrace{13\ 24}, \overbrace{23\ 14}, \overbrace{1\ 23\ 4}, \overbrace{13\ 24}, \overbrace{12\ 34}, \overbrace{14\ 23}, \dots \\ \dots \overbrace{13\ 24}, \overbrace{12\ 34}, \overbrace{1\ 234}, \overbrace{2\ 134}, \overbrace{3\ 124}, \overbrace{123\ 4}, \overbrace{1234}\}$$

tenemos que la matriz de conexidad es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.3. Invertibilidad de la Matriz de Conexidad

En esta sección identificaremos a los estados de conectividad con sus simetrías; es decir, existe una correspondencia biunívoca

$$\mathcal{A} \rightarrow S_{\mathcal{A}}$$

entre los estados de conectividad y los subgrupos del grupo de permutaciones S_n generados por transposiciones tal que

$$\mathcal{A} = \{k_1, k_2, \dots, k_n\} / S_{\mathcal{A}}$$

es decir, el estado de conectividad coincide con el conjunto de órbitas de $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ por la acción del subgrupo (generado por transposiciones) $S_{\mathcal{A}}$ (consultar [OBr]). (Observación: El hecho de que los subgrupos sean generados por transposiciones es para garantizar la maximalidad del subgrupo respecto a la propiedad anterior y asegurar la unicidad en la asociación.) De hecho, podemos pensar a los estados de conectividad como representaciones de los subgrupos del grupo de permutaciones generados por transposiciones.

Esta identificación muestra que los estados de conectividad tienen naturalmente una estructura de monoide conmutativo con unidad (consultar [Ge1])

$$e = \{id\} \approx \{\{k_1\}, \{k_2\}, \dots, \{k_n\}\}$$

con el producto

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rangle$$

Es claro que el producto está bien definido ya que el subgrupo generado por subgrupos generados por transposiciones está generado también por transposiciones. Observe también que Con tiene un orden parcial natural dado por la inclusión de los subgrupos asociados.

Esta identificación proporciona una manera elegante y útil de caracterizar un estado de conectividad de G : $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es conexo si y sólo si

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = S_n \approx \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$$

Definición 5.3.1. El grupo de permutaciones S_n actúa por conjugación en los estados de conectividad:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma \mathcal{A} \sigma^{-1}$$

En particular, tenemos clases de conjugación en Con , concretamente, las órbitas en Con bajo la acción del grupo S_n ; es decir, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ si existe una permutación σ tal que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B}) = \sigma \mathcal{B} \sigma^{-1}$.

Lema 5.3.1. Sea σ una permutación de S_n . Entonces $\sigma : Con \rightarrow Con$ es un morfismo unital de monoïdes, es decir, $\sigma(id) = id$ y además

$$\sigma(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{A}) \cdot \sigma(\mathcal{B})$$

Demostración: Es claro que $\sigma(id) = id$. Veamos que σ es morfismo de monoïdes. Observe que $\sigma(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$ contiene a $\sigma(\mathcal{A})$ y a $\sigma(\mathcal{B})$ por lo que, por definición,

$$\sigma(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \supset \sigma(\mathcal{A}) \cdot \sigma(\mathcal{B})$$

Por otro lado, $\sigma^{-1}(\sigma(\mathcal{A}) \cdot \sigma(\mathcal{B}))$ contiene a \mathcal{A} y a \mathcal{B} por lo que, por definición,

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \subset \sigma^{-1}(\sigma(\mathcal{A}) \cdot \sigma(\mathcal{B}))$$

Aplicando σ tenemos que

$$\sigma(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{A}) \cdot \sigma(\mathcal{B})$$

□

De esta manera, el \mathbb{Q} -espacio vectorial V generado por el monoide conmutativo Con es ahora una \mathbb{Q} -álgebra asociativa y conmutativa con unidad. El morfismo de monoides σ se extiende linealmente a un morfismo unital de álgebras, siendo σ una permutación de S_n .

Considere el operador lineal $\pi : V \rightarrow V$ tal que $\pi(S_n) = S_n$ y para todo estado de conectividad \mathcal{A} distinto de S_n ,

$$\pi(\mathcal{A}) = \prod_{\mathcal{B} / \mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}} (\mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$$

Lema 5.3.2. *Sea \mathcal{A} un estado de conectividad. El vector $\pi(\mathcal{A})$ verifica las siguientes propiedades:*

1. $\mathcal{B} \cdot \pi(\mathcal{A}) = 0 \ \forall \mathcal{B} / \mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}$
2. $\mathcal{C} \cdot \pi(\mathcal{A}) = \pi(\mathcal{A}) \ \forall \mathcal{C} / \mathcal{C} \leq \mathcal{A}$
3. $\pi(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\pi(\mathcal{A})) \ \forall \sigma \in S_n$

En particular, $\mathcal{A} \cdot \pi(\mathcal{A}) = \pi(\mathcal{A})$ y $\mathcal{B} \cdot \pi(\mathcal{A}) = 0$ para todo estado de conectividad \mathcal{B} distinto y conjugado a \mathcal{A} .

Demostración:

1. El álgebra es conmutativa y Con es una base de idempotentes, es decir, $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ para todo estado de conectividad \mathcal{A} .
2. Basta ver que $\mathcal{C} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}$ si $\mathcal{C} \leq \mathcal{A}$.
- 3.

$$\begin{aligned} \sigma(\pi(\mathcal{A})) &= \sigma \left(\prod_{\mathcal{B} / \mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}} (\mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \right) \\ &= \prod_{\mathcal{B} / \mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}} (\sigma(\mathcal{A}) - \sigma(\mathcal{A}) \cdot \sigma(\mathcal{B})) \\ &= \prod_{\sigma(\mathcal{B}) / \sigma(\mathcal{B}) \not\leq \sigma(\mathcal{A})} (\sigma(\mathcal{A}) - \sigma(\mathcal{A}) \cdot \sigma(\mathcal{B})) \\ &= \pi(\sigma(\mathcal{A})) \end{aligned}$$

donde utilizamos, en la última igualdad, que σ es invertible.

□

Definición 5.3.2. Para cada estado de conectividad \mathcal{A} definimos su número de conexidad $\alpha_{\mathcal{A}}$ como el coeficiente de S_n en el desarrollo de $\pi(\mathcal{A})$, es decir,

$$\pi(\mathcal{A}) = \dots + \alpha_{\mathcal{A}} S_n$$

Observe que por el punto tres del lema 5.3.2, el número de conexidad es invariante por conjugación, es decir,

$$\alpha_{\mathcal{A}} = \alpha_{\sigma(\mathcal{A})}$$

para toda permutación σ . Los lemas que siguen tienen por objetivo calcular los números de conexidad y mostrar en particular que son siempre distintos de cero.

Definición 5.3.3. Denotamos por Γ_n al grafo que consta de n vértices y una arista entre cada par de vértices. Denotamos por $\Gamma_n^{\mathcal{A}}$ al grafo que resulta de la identificación de los vértices $\{1, 2, \dots, n\}$ de Γ_n en las clases de \mathcal{A} .

Sea G un grafo y considere su polinomio de confiabilidad $R(G)$. Denotaremos por $mgr(R(G))$ al término de $R(G)$ cuyo grado coincide con el número de aristas de G . Observe que si G tiene aristas irrelevantes, $mgr(R(G)) = 0$. Si el término $mgr(R(G))$ es distinto de cero, entonces es el término de mayor grado del polinomio.

Lema 5.3.3. Sea G un grafo con k aristas entre un par de vértices distintos i y j de G . Considere el grafo \tilde{G} que resulta de extraer $k - 1$ aristas entre los vértices i y j de G . Entonces,

$$mgr(R(G)) = (-p)^{k-1} mgr(R(\tilde{G}))$$

Demostración. El resultado es claro para $k = 1$. Supongamos que hay $k > 1$ aristas entre los vértices i y j de G y que el resultado vale cuando hay una cantidad menor o igual a $k - 1$ de ellas. Considere una arista a entre los vértices i y j de G . Aplicando el teorema de factorización simple a la arista a tenemos

$$R(G) = p R(G \cdot a) + (1 - p)R(G - a)$$

siendo $G \cdot a$ el grafo que resulta de contraer a y $G - a$ el grafo que resulta de extraer a . Observe que el número de aristas de $G \cdot a$ y $G - a$ es el número de aristas de G menos uno y debido a que $k > 1$, $G \cdot a$ tiene aristas irrelevantes. Así,

$$mgr(R(G)) = (-p) mgr(R(G - a))$$

Por la hipótesis inductiva, tenemos el resultado. □

Lema 5.3.4. El polinomio de confiabilidad de Γ_n es

$$R(\Gamma_n) = \pm(n - 1)! p^g + \dots$$

siendo g , el grado más alto de la expresión, el número de aristas de Γ_n , a saber,

$$g = \binom{n}{2}$$

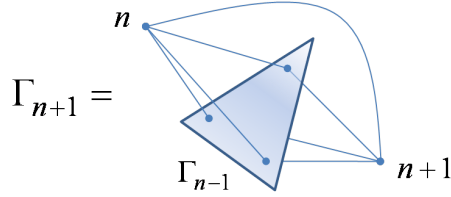
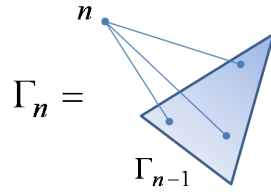


Figura 5.6: Relación entre los grafos Γ

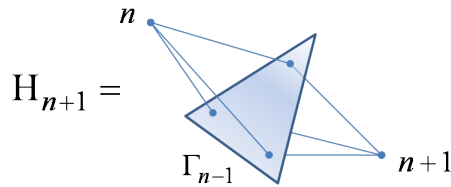


Figura 5.7: Grafo H_{n+1}

Demostración: Para aliviar la notación, identifiquemos en esta demostración a un grafo con su polinomio de confiabilidad. Veamos por inducción que

$$mgr(\Gamma_{n+1}) = (-1)^{n+1} n mgr(\Gamma_n) p^n$$

Para $n = 1$ es claro que la relación se verifica ya que $\Gamma_2 = p$ y $\Gamma_1 = 1$. Supongamos que se verifica para n .

La Figura 5.6 muestra la relación entre los distintos grafos Γ . Factorizando la arista entre los vértices n y $n + 1$ del grafo Γ_{n+1} mediante el teorema de factorización simple y empleando el truco descrito en el lema anterior, tenemos que

$$\Gamma_{n+1} = p(-p)^{n-1} \Gamma_n + \dots + (1 - p) H_{n+1}$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de grado menor al número de aristas de Γ_{n+1} y el grafo H_{n+1} es el grafo que resulta de extraer la arista entre los vértices n y $n + 1$ del grafo Γ_{n+1} , ver Figura 5.7.

Por hipótesis inductiva,

$$mgr(\Gamma_n) = (-1)^n (n - 1) mgr(\Gamma_{n-1}) p^{n-1}$$

lo que implica, debido a que la relación entre los grafos Γ_n y Γ_{n-1} es la misma

que la relación entre H_{n+1} y Γ_n (ver Figuras 5.6 y 5.7), la siguiente relación

$$mgr(H_{n+1}) = (-1)^n (n-1) mgr(\Gamma_n) p^{n-1}$$

Así, tenemos que

$$\Gamma_{n+1} = p(-p)^{n-1} \Gamma_n + \dots + (1-p)(-1)^n (n-1) \Gamma_n p^{n-1} + \dots = (-1)^{n+1} n \Gamma_n p^n + \dots$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de grado menor al número de aristas de Γ_{n+1} . Así concluimos que

$$mgr(\Gamma_{n+1}) = (-1)^{n+1} n mgr(\Gamma_n) p^n$$

Esta relación recursiva muestra que $mgr(\Gamma_n)$ es distinto de cero por lo que es el término de mayor grado de Γ_n , a saber,

$$\Gamma_n = (-1)^{n+(n-1)+\dots+2} (n-1)! p^{(n-1)+\dots+1} + \dots$$

lo que demuestra el lema. \square

Lema 5.3.5. *Sea \mathcal{A} un estado de conectividad con m clases de a_1, a_2, \dots, a_m elementos. Entonces*

$$R(\Gamma_n^{\mathcal{A}}) = \pm(m-1)! p^g + \dots$$

siendo g , el grado más alto de la expresión, el número de aristas no irrelevantes de $\Gamma_n^{\mathcal{A}}$, es decir,

$$g = \sum_{i \neq j} a_i a_j$$

Demostración: Para aliviar la notación, identifiquemos nuevamente en esta demostración a un grafo con su polinomio de confiabilidad. El grafo $\Gamma_n^{\mathcal{A}}$ tiene como vértices las m clases de \mathcal{A} , $\binom{a_i}{2}$ lazos irrelevantes en cada vértice i respectivamente y finalmente tiene $a_i a_j$ aristas entre los vértices i y j siendo a_i y a_j el número de elementos de las clases i y j respectivamente.

Sea $\bar{\Gamma}_n^{\mathcal{A}}$ el grafo que resulta de quitar los lazos irrelevantes de $\Gamma_n^{\mathcal{A}}$ de forma que $\Gamma_n^{\mathcal{A}}$ y $\bar{\Gamma}_n^{\mathcal{A}}$ tienen el mismo polinomio de confiabilidad. Mediante el truco de la simplificación del lema 5.3.3, podemos relacionar a $\bar{\Gamma}_n^{\mathcal{A}}$ con Γ_m como sigue

$$\begin{aligned} mgr(\bar{\Gamma}_n^{\mathcal{A}}) &= (-p)^{\sum_{i \neq j} (a_i a_j - 1)} mgr(\Gamma_m) \\ &= (-p)^{\sum_{i \neq j} (a_i a_j - 1)} (\pm(m-1)!) p^{\binom{m}{2}} \\ &= \pm(m-1)! p^{\sum_{i \neq j} a_i a_j} \end{aligned}$$

lo que demuestra el resultado. \square

Lema 5.3.6. *Sea \mathcal{A} un estado de conectividad con m clases. Entonces,*

$$\alpha_{\mathcal{A}} = \pm(m-1)!$$

Demostración: Sea \mathcal{A} un estado de conectividad y considere otro estado \mathcal{B} tal que $\mathcal{B} \not\subset \mathcal{A}$. Existe una transposición τ en \mathcal{B} que no pertenece a \mathcal{A} . Debido a que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ y $\langle \tau \rangle \subset \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ tenemos que $\mathcal{A} \cdot \langle \tau \rangle \subset \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ por lo que

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \cdot (\mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \langle \tau \rangle) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} - \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 0$$

Hemos demostrado así que,

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \cdot \left(\prod_{\tau \text{ transp. } / \langle \tau \rangle \not\subset \mathcal{A}} (\mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \langle \tau \rangle) \right) = 0$$

por lo que podemos escribir el vector $\pi(\mathcal{A})$ de la siguiente manera

$$\pi(\mathcal{A}) = \prod_{\tau \text{ transp. } / \langle \tau \rangle \not\subset \mathcal{A}} (\mathcal{A} - \mathcal{A} \cdot \langle \tau \rangle) = \mathcal{A} \cdot \left(\prod_{\tau \text{ transp. } / \langle \tau \rangle \not\subset \mathcal{A}} (e - \langle \tau \rangle) \right)$$

Desarrollando la expresión anterior concluimos que

$$\alpha_{\mathcal{A}} = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots$$

siendo C_i la cantidad de subconjuntos F de cardinal i del conjunto de transposiciones $\{\tau \text{ transp. } / \langle \tau \rangle \not\subset \mathcal{A}\}$ tales que $\langle F \rangle \cdot \mathcal{A} = S_n$.

Identificando a la transposición (ij) con la arista entre los vértices i y j de Γ_n , podemos interpretar a C_i como la cantidad de pathsets (estados operacionales) de $\Gamma_n^{\mathcal{A}}$ con sólo i aristas operacionales. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} R(\Gamma_n^{\mathcal{A}}) &= C_0(1-p)^g + C_1p(1-p)^{g-1} + C_2p^2(1-p)^{g-2} + \dots \\ &= (-1)^g(C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots)p^g \\ &= (-1)^g\alpha_{\mathcal{A}}p^g + \dots \end{aligned}$$

donde g es el número de aristas no irrelevantes de $\Gamma_n^{\mathcal{A}}$ y los puntos suspensivos denotan términos de grado menor que g . Por el lema anterior,

$$\alpha_{\mathcal{A}} = \pm(m-1)!$$

□

Sean $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_k\}$ las clases de conjugación de los estados de conectividad. El número de clases de un estado de conectividad es invariante por conjugación por lo que tiene sentido definir a $m_{\mathcal{O}_i}$ como el número de clases de algún elemento de \mathcal{O}_i .

Identificando los distintos niveles del diagrama de Hasse (diagrama de inclusiones) de los subgrupos generados por transposiciones de S_n y observando que estados conjugados pertenecen al mismo nivel, podemos ordenar a $\mathcal{C}on$ de la siguiente manera: Numeramos una clase del primer nivel, proseguimos con otra clase del mismo nivel y así hasta acabar con las clases del primer nivel. Continuamos numerando una clase del segundo nivel, proseguimos con otra clase del mismo nivel y así hasta acabar con las clases del segundo nivel. Lo mismo con

el tercer nivel y así, hasta acabar los niveles. A un orden como el descrito lo llamaremos orden coherente. Observe que este verifica que

$$\mathcal{A}_i < \mathcal{A}_j \Rightarrow i < j$$

Teorema 5.3.7. *Sea A la matriz de conexidad. Entonces,*

$$\det(A) = \pm \prod_{i=1}^k (m_{\mathcal{O}_i} - 1)! \#\mathcal{O}_i$$

Demostración: El determinante de A no depende del orden que tomemos en la base Con por lo que podemos tomar un orden coherente. Sea B la matriz asociada a π en la base Con con el orden coherente elegido. En la demostración del lema anterior concluimos que

$$\pi(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cdot \left(\prod_{\tau \text{ transp. / } \langle \tau \rangle \notin \mathcal{A}} (e - \langle \tau \rangle) \right)$$

por lo que B es triangular inferior con unos en su diagonal,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

En particular,

$$\det(B) = 1$$

Interpretando la expresión del vector $\pi(\mathcal{A})$ en términos de la base Con como operaciones elementales de filas en la matriz de conexidad A , por el lema 5.3.2 tenemos la siguiente identidad:

$$B^t A = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathcal{O}_1} I_{\#\mathcal{O}_1} & 0 & \dots & 0 \\ * & \alpha_{\mathcal{O}_2} I_{\#\mathcal{O}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \alpha_{\mathcal{O}_k} I_{\#\mathcal{O}_k} \end{pmatrix}$$

Debido a que $\det(B^t) = \det(B) = 1$ tenemos que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^k \alpha_{\mathcal{O}_i} \#\mathcal{O}_i$$

lo que, por el lema anterior, concluye la demostración. \square

Tomemos como ejemplo el caso $n = 4$. Las clases de conjugación de estados de conectividad son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 &= \{ 1234 \} \\
\mathcal{O}_2 &= \{ \overbrace{12} \overbrace{34}, \overbrace{13} \overbrace{24}, \overbrace{23} \overbrace{14}, \overbrace{1} \overbrace{23} 4, \overbrace{13} 24, \overbrace{12} \overbrace{34} \} \\
\mathcal{O}_3 &= \{ \overbrace{14} \overbrace{23}, \overbrace{13} \overbrace{24}, \overbrace{12} \overbrace{34} \} \\
\mathcal{O}_4 &= \{ \overbrace{1} \overbrace{234}, \overbrace{2} \overbrace{134}, \overbrace{3} \overbrace{124}, \overbrace{123} 4 \} \\
\mathcal{O}_5 &= \{ \overbrace{1234} \}
\end{aligned}$$

y los respectivos $m_{\mathcal{O}_i}$ son 4, 3, 2, 2, 1. Por el teorema anterior, el determinante de la matriz de conexidad es

$$\det(A) = \pm(4-1)!^1(3-1)!^6(2-1)!^3(2-1)!^4(1-1)!^1 = \pm 384$$

Podemos darle otra estructura de monoide conmutativo con unidad al conjunto Con con la intersección como el producto y S_n como la unidad. Análogamente a la construcción anterior, toda permutación en S_n es un morfismo unital de monoïdes y extendiendo este morfismo a V , la \mathbb{Q} -álgebra asociativa y conmutativa con unidad generada por el monoïde Con con este nuevo producto, toda permutación es un morfismo unital de álgebras.

Considere el operador lineal $\xi : V \rightarrow V$ tal que $\xi(\{id\}) = \{id\}$ y para todo estado de conectividad \mathcal{A} distinto de $\{id\}$,

$$\xi(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{C} / \mathcal{C} \leq \mathcal{A}} (\mathcal{A} - \mathcal{C})$$

Lema 5.3.8. *Sea \mathcal{A} un estado de conectividad. El vector $\xi(\mathcal{A})$ verifica las siguientes propiedades:*

1. $\mathcal{B} \cap \xi(\mathcal{A}) = 0 \ \forall \mathcal{B} / \mathcal{B} \leq \mathcal{A}$
2. $\mathcal{C} \cap \xi(\mathcal{A}) = \xi(\mathcal{A}) \ \forall \mathcal{C} / \mathcal{C} \geq \mathcal{A}$
3. $\xi(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\xi(\mathcal{A})) \ \forall \sigma \in S_n$

Demostración: Análoga a la demostración del lema 5.3.2. □

Teorema 5.3.9. *Tomemos un orden coherente en Con . Sean B y D las matrices asociadas a los operadores π y ξ en la base Con y sea*

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathcal{O}_1}^{-1} I_{\# \mathcal{O}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{\mathcal{O}_2}^{-1} I_{\# \mathcal{O}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{\mathcal{O}_k}^{-1} I_{\# \mathcal{O}_k} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A^{-1} = B C D$$

Demostración: Siguiendo la demostración del teorema 5.3.7, observe que, por el lema 5.3.2, la matriz $C B^t A$ es tal que su entrada ij es uno si $\mathcal{A}_j \leq \mathcal{A}_i$, es decir, si $\mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i$ y cero en otro caso.

Interpretando la expresión del vector $\xi(\mathcal{A})$ en términos de la base Con como operaciones elementales de filas en la matriz $C B^t A$ y observando que en esta expresión sólo aparecen los elementos \mathcal{C} tales que $\mathcal{C} \leq \mathcal{A}$, por el lema 5.3.8 tenemos que

$$I = D^t C B^t A$$

ya que si $\mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}$ y $\mathcal{C} \leq \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B} \not\leq \mathcal{C}$. Debido a que A es simétrica, transponiendo la expresión anterior vemos que A también tiene inversa a derecha y que $A^{-1} = B C D$. \square

Tomemos como ejemplo el caso $n = 3$. Un orden coherente en la base Con es

$$Con = \{123, 1 \widehat{23}, \widehat{13} 2, \widehat{12} 3, \widehat{123}\}$$

Calculemos las matrices B , C y D del teorema anterior:

$$\begin{aligned} \pi(123) &= 123 - \widehat{12} 3 - \widehat{13} 2 - 1 \widehat{23} + 2 \cdot \widehat{123} \\ \pi(\widehat{12} 3) &= \widehat{12} 3 - \widehat{123} \\ \pi(\widehat{13} 2) &= \widehat{13} 2 - \widehat{123} \\ \pi(1 \widehat{23}) &= 1 \widehat{23} - \widehat{123} \\ \pi(\widehat{123}) &= \widehat{123} \end{aligned}$$

por lo que la matriz asociada a π en la base Con es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que la última fila tiene como entradas los respectivos números de conexión por lo que

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\xi(123) &= 123 \\
\xi(\overbrace{12}^{\wedge}3) &= \overbrace{12}^{\wedge}3 - 123 \\
\xi(\overbrace{13}^{\wedge}2) &= \overbrace{13}^{\wedge}2 - 123 \\
\xi(\overbrace{123}^{\wedge}) &= 1\overbrace{23}^{\wedge} - 123 \\
\xi(\overbrace{123}^{\wedge}) &= \overbrace{123}^{\wedge} - \overbrace{12}^{\wedge}3 - \overbrace{13}^{\wedge}2 - 1\overbrace{23}^{\wedge} + 2 \cdot 123
\end{aligned}$$

por lo que la matriz asociada a ξ en la base *Con* es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Por el teorema anterior, tenemos que la inversa de la matriz de conexidad en el caso $n = 3$ es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

El grupo de permutaciones S_3 tiene la particularidad de que sus subgrupos minimales no triviales coinciden con sus subgrupos maximales no triviales y ésta es la razón de porqué en este caso la matriz D coincide con la transpuesta de B . Esta coincidencia sólo ocurre en este caso. Si bien es más tedioso, el cálculo de la inversa de la matriz de conexidad en los demás casos sigue exactamente los mismos pasos que el cálculo anterior y se efectúa mediante el álgebra generada por el monoide de los estados de conectividad. Ésta es la virtud de la teoría.

Finalmente, por el teorema 5.3.9, podemos interpretar a los números de conexidad, salvo el signo, como los números cuya descomposición prima genera los factores invariantes del grupo abeliano de torsión

$$\frac{\mathbb{Z}\langle Con \rangle}{\mathbb{Z}\langle R_{\mathcal{A}} / \mathcal{A} \in Con \rangle}$$

que resulta del cociente entre el grupo abeliano libre generado por los estados de conectividad y el subgrupo generado por los vectores $R_{\mathcal{A}}$ tal que \mathcal{A} es un estado de conectividad (consultar [Ge2]).

Teorema 5.3.10.

$$\frac{\mathbb{Z}\langle Con \rangle}{\mathbb{Z}\langle R_{\mathcal{A}} / \mathcal{A} \in Con \rangle} \simeq \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}_{(m_{\mathcal{O}_i}-1)!}^{\#\mathcal{O}_i}$$

Demostración: Siguiendo la demostración del teorema 5.3.9 tenemos que, debido a que B y D son matrices triangulares con entradas enteras y unos en su diagonal, B y D son matrices invertibles en $M_m(\mathbb{Z})$; es decir

$$B, D \in GL_m(\mathbb{Z})$$

y en particular, ξ es un automorfismo de $\mathbb{Z}\langle Con \rangle$, es decir

$$\xi \in Aut(\mathbb{Z}\langle Con \rangle)$$

Así tenemos que

$$DA = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathcal{O}_1} I_{\#\mathcal{O}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{\mathcal{O}_2} I_{\#\mathcal{O}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{\mathcal{O}_k} I_{\#\mathcal{O}_k} \end{pmatrix} B^{-1}$$

Sea N el subgrupo de $\mathbb{Z}\langle Con \rangle$ generado por los vectores $\alpha_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ tal que \mathcal{A} es un estado de conectividad. Debido al lema 5.2.1, a que B es invertible en $M_m(\mathbb{Z})$ y a que

$$\xi(R_{\mathcal{A}_j}) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \xi(\mathcal{A}_i) = \sum_{i,k=1}^m d_{ki} a_{ij} \mathcal{A}_k = \sum_{i,k=1}^m \alpha_k \delta_{ki} e_{ij} \mathcal{A}_k = \sum_{i=1}^m e_{ij}(\alpha_i \mathcal{A}_i)$$

siendo $(e_{ij}) = B^{-1}$ y $(d_{ij}) = D$, tenemos que N es isomorfo por ξ al subgrupo de $\mathbb{Z}\langle Con \rangle$ generado por los vectores $R_{\mathcal{A}}$ tal que \mathcal{A} es un estado de conectividad. Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}\langle R_{\mathcal{A}} / \mathcal{A} \in Con \rangle & \longrightarrow & \mathbb{Z}\langle Con \rangle & \longrightarrow & \frac{\mathbb{Z}\langle Con \rangle}{\mathbb{Z}\langle R_{\mathcal{A}} / \mathcal{A} \in Con \rangle} \longrightarrow 0 \\ & & \xi, \simeq \downarrow & & \xi, \simeq \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \mathbb{Z}\langle Con \rangle & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}_{(m_{\mathcal{O}_i}-1)!}^{\#\mathcal{O}_i} \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde utilizamos el lema 5.3.6. Por el lema de los cinco, resultado clásico de álgebra homológica (consultar [Rot]), tenemos el resultado. \square

A modo de ejemplo, en el caso $n = 3$ tenemos

$$\frac{\mathbb{Z}\langle Con \rangle}{\mathbb{Z}\langle R_{\mathcal{A}} / \mathcal{A} \in Con \rangle} \simeq \mathbb{Z}_2$$

mientras que en el caso $n = 4$ tenemos que

$$\frac{\mathbb{Z}\langle Con \rangle}{\mathbb{Z}\langle R_{\mathcal{A}} / \mathcal{A} \in Con \rangle} \simeq \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2^6 \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2^7$$

Observe que, a diferencia de los casos anteriores, en los casos $n > 4$ los factores invariantes proporcionan información más fina que la mera descomposición prima del determinante de la matriz de conectividad. Por ejemplo, para $n = 5$, tenemos

\mathcal{O}	$\#\mathcal{O}$	$m_{\mathcal{O}}$
[12345]	1	5
[$\widehat{12}$ 345]	10	4
[$\widehat{12}$ $\widehat{34}$ 5]	15	3
[$\widehat{123}$ 45]	10	3
[$\widehat{1234}$ 5]	5	2
[$\widehat{123}$ $\widehat{45}$]	10	2
[$\widehat{12345}$]	1	1

por lo que

$$\frac{\mathbb{Z}\langle \text{Con} \rangle}{\mathbb{Z}\langle R_{\mathcal{A}} / \mathcal{A} \in \text{Con} \rangle} \simeq \mathbb{Z}_{4!} \oplus \mathbb{Z}_{3!}^{10} \oplus \mathbb{Z}_2^{15} \oplus \mathbb{Z}_2^{10} \simeq \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3^{11} \oplus \mathbb{Z}_2^{35}$$

Capítulo 6

Conclusiones

El objetivo de la tesis de crear nuevos métodos tanto aproximados como exactos para el cálculo de la confiabilidad de un grafo fue alcanzado. Este estudio culmina elegantemente en el Teorema 3.3.3 que establece el comportamiento asintótico de la confiabilidad en términos de la conexidad del grafo en cuestión y en la Teoría de Factorización desarrollada en el capítulo 5. Éstos son los resultados centrales de la tesis.

Apéndice A

Polinomios de Confiabilidad

A diferencia del capítulo anterior, en este apéndice consideramos a las regiones Este y Oeste de la red de ANTEL compartiendo la arista entre los nodos *TIU* y *TIA*. Las Figuras (A.1) y (A.2) muestran los nodos de mayor tráfico (nodos color amarillo) de la red de ANTEL. Observe que el conjunto de nodos de grado mayor o igual a tres está contenido en el conjunto de nodos de mayor tráfico por lo que vale el teorema de descomposición en formas simples (Teorema 2.2.2) para el cálculo exacto de la confiabilidad.

El polinomio de confiabilidad de la región Este de la red de ANTEL respecto a los nodos de grado mayor o igual a tres es:

$$\begin{aligned} &536 p^{65} - 2742 p^{64} + 5232 p^{63} - 4639 p^{62} + 2634 p^{61} - 2481 p^{60} + 1823 p^{59} + 590 p^{58} - 1696 p^{57} + 406 \\ &p^{56} + 1353 p^{55} - 2723 p^{54} + 4224 p^{53} - 5708 p^{52} + 6966 p^{51} - 7292 p^{50} + 6836 p^{49} - 6586 p^{48} + 6245 \\ &p^{47} - 5240 p^{46} + 4025 p^{45} - 3453 p^{44} + 2836 p^{43} - 2032 p^{42} + 1496 p^{41} - 1163 p^{40} + 817 p^{39} - 257 p^{38} + \\ &28 p^{37} + 81 p^{36} - 162 p^{35} + 201 p^{34} - 179 p^{33} + 75 p^{32} - 101 p^{31} + 60 p^{30} - 49 p^{29} + 23 p^{28} - 17 p^{27} + 18 \\ &p^{26} + p^{25} + 8 p^{24} + p^{23} + 4 p^{22} + p^{21} + p^{20} \end{aligned}$$

El polinomio de confiabilidad de la región Oeste de la red de ANTEL respecto a los nodos de grado mayor o igual a tres es:

$$\begin{aligned} &-22 p^{57} + 16 p^{56} + 42 p^{55} - 24 p^{54} - 23 p^{53} + 30 p^{52} + 13 p^{51} - 38 p^{50} - 41 p^{49} + 29 p^{48} + 26 p^{47} - 56 p^{46} \\ &+ 23 p^{45} + 47 p^{44} - 12 p^{43} + 16 p^{42} - 16 p^{41} - 8 p^{40} + 30 p^{39} - 36 p^{38} - 25 p^{37} + 19 p^{36} + 21 p^{35} - 10 p^{34} - \\ &8 p^{33} + 32 p^{32} - 4 p^{31} - 11 p^{30} + 4 p^{29} - 17 p^{28} - p^{27} - 4 p^{26} - 12 p^{25} + 6 p^{24} + 4 p^{23} + 2 p^{22} + p^{21} + 4 p^{20} + \\ &4 p^{19} \end{aligned}$$

El polinomio de confiabilidad de la región Este de la red de ANTEL respecto a los nodos de mayor tráfico es:

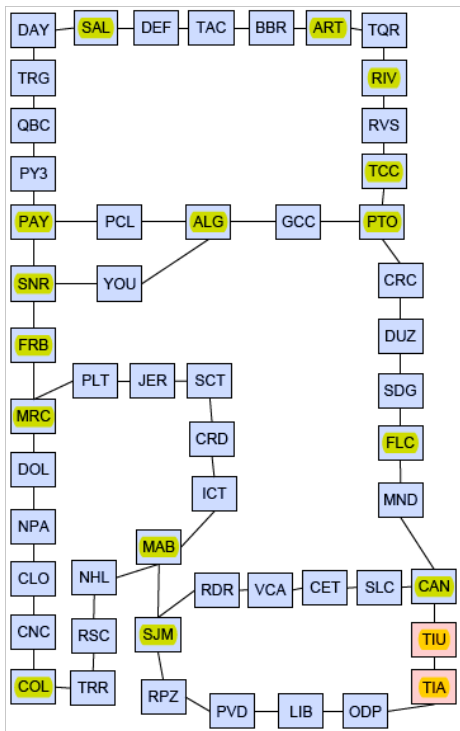


Figura A.1: Nodos de mayor tráfico de la Región Oeste de la red de ANTEL

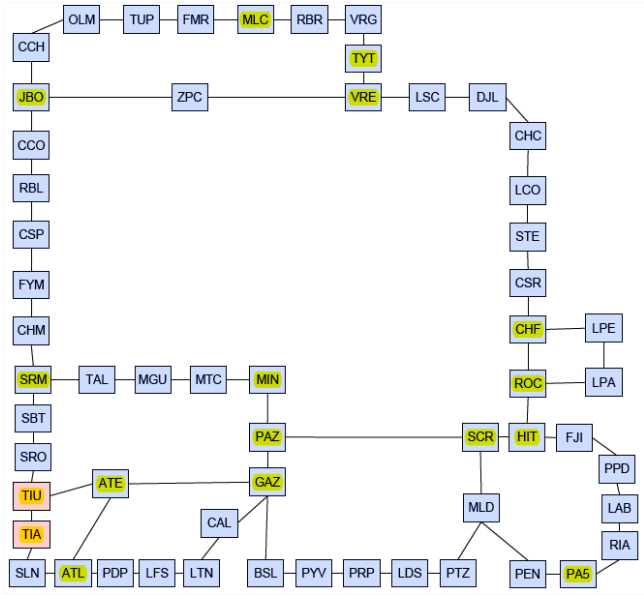


Figura A.2: Nodos de mayor tráfico de la Región Este de la red de ANTEL

$$5268 p^{65} - 29248 p^{64} + 62941 p^{63} - 67457 p^{62} + 46531 p^{61} - 42344 p^{60} + 50705 p^{59} - 45071 p^{58} + 29061 p^{57} - 23128 p^{56} + 24772 p^{55} - 12997 p^{54} - 248 p^{53} + 1441 p^{52} + 747 p^{51} - 726 p^{50} - 2678 p^{49} + 2457 p^{48} - 1249 p^{47} + 1803 p^{46} - 1071 p^{45} + 1021 p^{44} - 107 p^{43} + 21 p^{42} - 217 p^{41} + 3 p^{40} - 219 p^{39} - 57 p^{38} - 40 p^{37} - 26 p^{36} + 19 p^{35} + 27 p^{34} + 16 p^{33} + 27 p^{32} + 12 p^{31} + 6 p^{30} + 5 p^{29} + p^{28}$$

El polinomio de confiabilidad de la región Oeste de la red de ANTEL respecto a los nodos de mayor tráfico es:

$$-564 p^{57} + 976 p^{56} + 452 p^{55} - 1312 p^{54} + 514 p^{53} + 580 p^{52} - 1222 p^{51} - 584 p^{50} + 994 p^{49} + 321 p^{48} - 299 p^{47} + 414 p^{46} + 442 p^{45} - 256 p^{44} - 433 p^{43} - 51 p^{42} - 25 p^{41} - 133 p^{40} + 19 p^{39} + 92 p^{38} + 33 p^{37} + 18 p^{36} + 19 p^{35} + 6 p^{34}$$

El polinomio de all terminal confiabilidad de la región Oeste de la red de ANTEL es:

$$-184580 p^{57} + 1005912 p^{56} - 2191715 p^{55} + 2386639 p^{54} - 1298933 p^{53} + 282678 p^{52}$$

Bibliografía

- [Bi] N.L.Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge, Cambridge University Pres, 1993.
- [Br] D.B.Brown, *A computerized algorithm for determining the reliability of redundant configurations*, IEEE Trans. Reliability R-20, 1971, 121-124.
- [Co] C.J.Colbourn, *The Combinatorics of Network Reliability*, New York, Oxford University Press, 1987.
- [Ge1] E.Gentile, *Estructuras Algebraicas I*, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, OEA, Tercera Edición, 1977.
- [Ge2] E.Gentile, *Estructuras Algebraicas II*, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, OEA, Segunda Edición, 1979.
- [LMC] C.Lucet, J.F.Manouvrier, J.Carlier, *Evaluating Network Reliability and 2-Edge-Connected Reliability in Linear Time for Bounded Pathwidth Graphs*, Algorithmica, 27 (2000), 316-336.
- [Mi] J.Milnor, *Topology from the Differentiable Point of View*, Princeton University Press, 1965.
- [MMP] C.L. Monma, B.S. Munson, and W.R. Pulleyblank, *Minimum-weight two connected spanning networks*, Mathematical Programming, 46(1), 1990, 153 – 171.
- [Obr] H.O Brien, *Estructuras Algebraicas III*, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, OEA, Primera Edición, 1973.
- [Rot] J.Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Universitext, Springer, Second Ed., 2000.
- [SC] A.Satyanarayana, M.Chang, *Network Reliability and the Factoring Theorem*, Networks, 13 (1983), 107-120.
- [SW] A.Satyanarayana, R.K.Wood, *A linear time algorithm for computing k-terminal reliability in series-parallel networks*, SIAM J.Comput., 14 (1985), 818-832.
- [Ta] C.Tanguy, *Exact solutions for the two terminal reliability of recursive structures: a few directions*, To appear in Networks.