



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

## Programa de Elasticidad

### 1. NOMBRE DE LA UNIDAD CURRICULAR

Elasticidad

### 2. CRÉDITOS

10 créditos

### 3. OBJETIVOS DE LA UNIDAD CURRICULAR

#### Objetivos generales:

Se espera que el estudiante **adquiera los conceptos básicos de la teoría que modela el comportamiento de los cuerpos elásticos bajo la acción de cargas y deformaciones aplicadas**. Estos conceptos le servirán para comprender los métodos analíticos y numéricos utilizados para el análisis de problemas de elasticidad lineal.

#### Objetivos específicos para la ganancia del curso:

Para prepararse adecuadamente para el examen y tener un buen aprovechamiento en las siguientes unidades curriculares (UC) de la carrera se espera que el estudiante logre **comprender las definiciones y conceptos básicos de la teoría de la elasticidad y aplicarlos en la solución de ejercicios sencillos**. Se describen los objetivos de aprendizaje específicos para la ganancia del curso, organizados según el temario de la UC:

1. **Explicar** el ensayo de tracción para caracterización de materiales, los conceptos de tensión nominal y deformación unitaria, comportamiento elástico, comportamiento elastoplástico, material frágil, material dúctil, módulo de Young, tensión de fluencia, tensión de rotura, tenacidad del material y energía de deformación elástica. **Explicar** en qué consiste el problema de elasticidad unidimensional, cuáles son los datos, incógnitas principales, ecuaciones de campo y de contorno, y cuál es y cómo utilizar la ecuación de campo de Navier.

2. **Explicar** los conceptos relacionados al equilibrio de un cuerpo continuo tridimensional: fuerzas de volumen y de superficie, equilibrio de cuerpos continuos, hipótesis de Cauchy, acción y reacción, tensor de tensiones, componentes normal y rasante del vector tensión, tensiones y direcciones principales.
3. **Explicar** la descripción matemática de la deformación del cuerpo continuo tridimensional: los conceptos de desplazamiento, estiramiento, deformación de Lagrange, deformación de ingeniería y distorsión angular, y qué son y cómo se utilizan las galgas extensométricas de resistencia eléctrica.
4. **Explicar** los siguientes conceptos sobre el comportamiento constitutivo en el caso tridimensional: comportamiento elástico, lineal, hiperelástico e isótropo; constantes de Lamé, módulo de Young y coeficiente de Poisson, dilatación térmica y coeficiente de dilatación. **Calcular** el tensor de tensiones o de deformaciones utilizando la ecuación constitutiva. **Explicar** los conceptos de material frágil, material dúctil, región elástica, tensión equivalente, y los criterios de resistencia de Rankine, Tresca-Guest, von Mises, envolvente de Mohr, Mohr-Coulomb. **Representar** esos criterios en los espacios de Mohr y Westergaard y poder calcular las tensiones equivalentes para un estado tensional dado.
5. **Explicar** con palabras y matemáticamente el planteo de la formulación fuerte del problema de elasticidad lineal, datos, incógnitas, ecuaciones de campo y condiciones de contorno. **Enunciar** el primer y segundo teorema del trabajo virtual, así como la formulación débil del problema de elasticidad lineal.
6. **Describir** matemáticamente el problema de torsión en barras rectas de sección circular o anular, y los conceptos de giro, barrenado, momento torsor, módulo de torsión y módulo resistente.
7. **Explicar** las hipótesis que definen los estados planos de deformaciones y tensiones, y las formulaciones de los problemas planos de elasticidad asociados.
8. **Explicar** a grandes rasgos qué es el método de los elementos finitos: cómo es la aproximación por interpolación del desplazamiento para el elemento triangular lineal, cómo quedan expresados los desplazamientos, deformaciones y tensiones en función de los desplazamientos nodales y cuáles las ecuaciones que el método plantea.

#### **Objetivos específicos para la aprobación de la UC:**

Para lograr los créditos correspondientes a la UC se espera que el estudiante logre **comprender conceptos más avanzados de la teoría de la elasticidad, los cuales necesitará para tener dominio de procedimientos analíticos y numéricos de análisis más sofisticados utilizados para resolver problemas de elasticidad.** Se describen los objetivos de aprendizaje específicos para la aprobación de la UC, organizados según el temario:

1. **Aplicar** los métodos analíticos y numéricos utilizados al análisis de estructuras construidas con elementos unidimensionales articulados, incluyendo el caso de tener fuerzas externas móviles. Se incluyen aquí el método de los desplazamientos, el método de las fuerzas, y el método de los elementos finitos.
2. **Utilizar** las ecuaciones de equilibrio para **demostrar** resultados teóricos tales como el lema de acción y reacción y el teorema de existencia del tensor de tensiones. **Explicar** el significado físico de las componentes de la matriz del tensor de tensiones, el significado físico de las ecuaciones puntuales de equilibrio, las cuales deberá saber aplicar a la resolución de problemas. **Utilizar** el círculo y tricírculo de Mohr, y comprender sus consecuencias sobre los valores máximos y mínimos de las componentes del vector tensión. **Explicar** qué es un estado membranar de tensiones, en particular el que ocurre en un recipiente cilíndrico o esférico sometido a presión interna.
3. **Explicar** conceptos más avanzados sobre la descripción de la deformación: la definición de los tensores de deformación de Green y Lagrange, y **demostrar** su relación con las medidas de deformación utilizadas en Ingeniería. **Explicar** la hipótesis de pequeñas deformaciones, la definición del tensor de deformaciones infinitesimales, el significado físico de sus componentes y su uso en el cálculo de deformaciones de ingeniería, distorsiones angulares y dilatación volumétrica, incluyendo el uso del círculo de Mohr. **Explicar** el significado físico de las ecuaciones de compatibilidad y saber cómo utilizar galgas extensométricas de resistencia eléctrica para medir deformaciones de ingeniería y distorsiones angulares.
4. En el caso de los materiales hiperelásticos lineales isótropos, **recordar** la expresión matemática de la densidad de energía de deformación y **calcularla** en función del tensor de deformaciones conociendo las propiedades del material. **Explicar** los conceptos de módulo volumétrico y el módulo transversal.
5. En el problema tridimensional, **explicar** qué es y cómo se obtiene la ecuación de Navier y **utilizarla** para **resolver** problemas de elasticidad con simetría cilíndrica o esférica. **Aplicar** el teorema de Gauss para **demostrar** el primer y segundo teoremas del trabajo virtual, y el teorema de Betti. **Explicar** los conceptos de desplazamiento virtual infinitesimal de cuerpo rígido, estructura estable, y los teoremas de unicidad de la solución y mínima energía potencial total del problema de elasticidad lineal.
6. **Describir** el desplazamiento en una barra de sección general sometida a un momento torsor, y **explicar** los conceptos de la teoría de torsión de Saint-Venant: giro de la sección transversal, barrenado y alabeo, así como los elementos de la formulación diferencial para la función de alabeo unitario y la función de Prandtl, las cuales permiten calcular el módulo de torsión de la barra y con ello las tensiones y deformaciones producidas por la acción de un momento torsor.

7. En problemas de estados planos, **reconocer** qué modelo de estado plano es más apropiado, **explicar** qué son las curvas isostáticas y **esbozar** las mismas con la ayuda de herramientas computacionales.
8. **Aplicar** el primer teorema del trabajo virtual para **demostrar** la ecuación del elemento finito, en la cual deberá **reconocer** los términos calculables directamente y las incógnitas. **Explicar** cómo es el procedimiento de montaje del sistema global de ecuaciones y cómo se obtienen los desplazamientos nodales, las reacciones nodales, y los campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones. **Explicar** el concepto de elemento isoparamétrico: elemento de referencia, funciones de forma y la transformación geométrica que definen, el jacobiano de la transformación, las derivadas espaciales de las funciones de forma y el procedimiento de integración. **Explicar** qué tipos de elementos triangulares y cuadriláteros se pueden utilizar y cuáles son sus ventajas y desventajas.

#### **4. METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA**

La unidad curricular es semestral. Se dictarán dos clases semanales teórico-prácticas de una hora y media y una clase semanal práctica de dos horas. El estudiante deberá además dedicar cinco horas semanales para tareas domiciliarias, en las que se incluyen horas de estudio, resolución de problemas y preparación de informes sobre trabajos computacionales realizados en grupos. En total se estiman diez horas semanales de dedicación del estudiante.

## 5. TEMARIO

1. Introducción a la Elasticidad: Ensayo de tracción axial. Ecuaciones de campo de la barra traccionada y ecuación de Navier. Primer teorema del trabajo virtual. Método de las fuerzas y de los desplazamientos. Elementos finitos para elasticidad unidimensional: aplicación a la resolución de reticulados planos isostáticos e hiperestáticos, considerando cargas en nodos y cargas móviles.
2. Equilibrio: Equilibrio en cuerpos continuos: densidad de fuerzas de volumen y de contacto y ecuaciones de equilibrio. Existencia del tensor de tensiones. Ecuaciones puntuales de equilibrio. Consecuencias de la simetría del tensor de tensiones. Círculo y Tricírculo de Mohr. Estado membranar de tensiones y la solución del cilindro y la esfera con presión interna.
3. Cinemática: Función deformación y medidas de cuantitativas de la deformación. Tensores de deformaciones de Green y de Lagrange. Función desplazamiento y pequeñas deformaciones. Tensores de rotación y deformación infinitesimales. Deformación unitaria y distorsión angular. Simetría del tensor de deformaciones. Dilatación volumétrica. Ecuaciones de compatibilidad. Medida experimental de la deformación.
4. Comportamiento material: Material sólido hiperelástico lineal. Densidad de energía de deformación. Ecuación constitutiva del material hiperelástico lineal isótropo. Módulo volumétrico y módulo transversal. Módulo de Young y coeficiente de Poisson. Material termoelástico. Límites del comportamiento elástico. Espacios de Mohr y Westergaard. Criterios de resistencia para materiales dúctiles: von Mises y Tresca. Criterios de resistencia para materiales granulares: criterios de la envolvente de Mohr y de Mohr-Coulomb.
5. Elasticidad lineal: Problema de elasticidad lineal. Ecuación de Navier. Analogía de Duhamel. Teoremas de los trabajos virtuales. Teorema de Betti. Formulación débil en desplazamientos. Unicidad de la solución, Teorema de la mínima energía potencial total.
6. Torsión en barras rectas: Torsión en barra de sección transversal circular y anular. Torsión general de Saint-Venant.
7. Estados planos: Estados planos de deformaciones. Estados planos de tensiones. Curvas isostáticas.
8. Método de los elementos finitos: Ecuación del elemento finito. Montaje del sistema de ecuaciones y solución. Obtención de desplazamientos, deformaciones y tensiones. Integrales en el elemento de referencia. Tipos de elementos.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

Identificación de las publicaciones básicas y complementarias adecuadas para el buen seguimiento del curso. Se debería observar la disponibilidad de estos textos, tanto en la Biblioteca de Facultad como en el mercado. En caso de existir varios textos principales, indicar para qué tema aporta cada uno. La referencia bibliográfica deberá darse de la siguiente forma:

Tema	Básica	Complementaria
1. Introducción a la Elasticidad	(1-3)	(4-6)
2. Equilibrio	(1-3)	(4-6)
3. Cinemática	(1-3)	(4-6)
4. Comportamiento material	(1-3)	(4-6)
5. Elasticidad lineal	(1-3)	(4-6)
6. Torsión en barras rectas	(1-3)	(4-6)
7. Estados planos	(1-3)	(4-6)
8. Método de los elementos finitos	(1)	(7-9)

### 6.1 Básica

1. Alfredo Canelas. Apuntes del curso Elasticidad. Facultad de Ingeniería, Uruguay, 2020. Disponible en la página <https://eva.fing.edu.uy/course/view.php?id=902>.
2. M. H. Sadd. Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Academic Press, 2 edition, 2009. ISBN 978-0-12-374446-3.
3. L. Ortiz Berrocal. Elasticidad. McGraw-Hill/Interamericana de España, S. A. U., Madrid, 3rd edition, 1998. ISBN 84-481-2046-9.

### 6.2 Complementaria

4. P. Podio-Guidugli. A primer in elasticity. Journal of Elasticity. The Physical and Mathematical Science of Solids, 58(1):x+104, 2000. ISSN 0374-3535.
5. S. Timoshenko and J. N. Goodier. Theory of Elasticity. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 2nd edition, 1951.
6. K. D. Hjelmstad. Fundamentals of Structural Mechanics. Springer Science + Business Media, Inc., Barcelona, 2nd edition, 2005. ISBN 978-0-387-23330-7.
7. T. R. Chandrupatla and A. D. Belegundu. Introducción al estudio del Elemento Finito en Ingeniería. Prentice Hall, México, 2nd edition, 1999. ISBN 978-9-70-170260-4.

8. T. J. R. Hughes. The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1987. ISBN 0-13-317025-X.
9. E. Oñate. Structural analysis with the finite element method—linear statics. Volume 1. Basis and solids. Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona; Springer-Verlag, Berlin, 2009. ISBN 978-1-4020-8732-5.

## **7. CONOCIMIENTOS PREVIOS EXIGIDOS Y RECOMENDADOS**

**7.1 Conocimientos Previos Exigidos:** Cálculo diferencial e integral en una y varias variables, Cálculo vectorial, Álgebra lineal, Mecánica Newtoniana, conocimientos básicos de Resistencia de Materiales.

**7.2 Conocimientos Previos Recomendados:** Ecuaciones diferenciales, Conocimientos básicos de programación y herramientas software: Matlab u Octave, Planilla electrónica, procesador de textos.

**ANEXO A**  
**Para todas las Carreras**

**A1) INSTITUTO**

Instituto de Estructuras y Transporte (IET).

**A2) CRONOGRAMA TENTATIVO**

Semana 1	Tema 1 (5 hs de clase).
Semana 2	Tema 1 (5 hs de clase).
Semana 3	Tema 1 (3.5 hs de clase). Tema 2 (1.5 hs de clase).
Semana 4	Tema 2 (5 hs de clase).
Semana 5	Tema 2 (5 hs de clase).
Semana 6	Tema 3 (5 hs de clase).
Semana 7	Tema 3 (5 hs de clase).
Semana 8	Tema 4 (5 hs de clase).
Semana 9	Tema 4 (1.5 hs de clase). Tema 5 (3.5 hs de clase). Presentación de la propuesta de trabajos en grupo.
Semana 10	Tema 5 (5 hs de clase).
Semana 11	Tema 6 (5 hs de clase).
Semana 12	Tema 7 (5 hs de clase).
Semana 13	Tema 8 (5 hs de clase).
Semana 14	Tema 8 (3.5 hs de clase). Tema 4 (1.5 hs de clase). Entrega de los informes de trabajos en grupo.
Semana 15	Tema 4 (5 hs de clase).

### **A3) MODALIDAD DEL CURSO Y PROCEDIMIENTO DE EVALUACIÓN**

#### **Clases teórico-prácticas:**

Consisten en una exposición inicial de conceptos y/o procedimientos de análisis por parte del docente. Esta exposición aborda una temática previamente establecida e informada al estudiante, de forma que pueda realizar una actividad previa de repaso de conocimientos anteriores o una lectura previa de material de estudio facilitado. Luego se plantea una actividad para realizar en grupos, que aborda una problemática relacionada a los conceptos y procedimientos tratados en la exposición inicial. En general se plantea un problema modelo sencillo, con el fin de que los grupos puedan aplicar inmediatamente el conocimiento adquirido, y resolver completamente el problema propuesto. Finalmente, se analizan en forma conjunta los resultados obtenidos por los distintos grupos, con el fin de ilustrar el mejor procedimiento o solución encontrada, alertar sobre errores frecuentes y realizar una síntesis de los conocimientos y procedimientos introducidos.

Al finalizar cada unidad temática se proporcionan al alumno instrumentos como cuestionarios de autoevaluación u otros similares, que le permitan comprobar el logro de los objetivos de aprendizaje de ganancia del curso.

#### **Clases prácticas:**

Comienzan con una actividad de repaso inicial de los conceptos tratados en las clases teórico-prácticas. Esa actividad puede estar a cargo de un docente, aunque también se busca favorecer la participación de los alumnos, con el fin de entrenar sus capacidades de exposición de los conceptos teóricos. Luego se propone una actividad para realizar en grupos que consiste en resolver un problema modelo más complejo y completo que los abordados en las clases teórico-prácticas. Ese problema es similar a los indicados en una lista de ejercicios propuesta a los alumnos en esa clase. Luego se realiza una síntesis conjunta y finalmente se pasa a una modalidad de clase de consulta donde los alumnos pueden consultar sus dudas sobre la resolución de los problemas del listado de ejercicios proporcionado, o alguno de los problemas tratados en clases anteriores.

#### **Procedimiento de evaluación:**

Los estudiantes son evaluados mediante:

- 2 pruebas parciales de 40 puntos cada una
- la entrega de informes sobre trabajos grupales de resolución de problemas de elasticidad por métodos computacionales, que totalizan 20 puntos.

Del total de 100 puntos, 35 corresponden a contenidos fundamentales identificados como imprescindibles para cursar las siguientes UC de la carrera, distribuidos en:

- 15 puntos en cada prueba parcial
- 5 puntos en los informes de trabajos grupales

Los objetivos de aprendizaje relacionados a estos contenidos fundamentales se indican en la Sección 3 (Objetivos específicos para la ganancia del curso). En las instancias de evaluación se indicará con claridad qué preguntas contribuyen a los 35 puntos sobre contenidos fundamentales.

En las evaluaciones parciales se solicita al alumno exponer temas teóricos y resolver ejercicios prácticos. En el caso de los 30 puntos sobre contenidos fundamentales, las preguntas y ejercicios planteados son similares a los de los cuestionarios proporcionados al alumno durante el curso. En el caso de los 50 puntos restantes, los temas teóricos deben ser expuestos con un nivel de detalle similar al de la bibliografía básica recomendada, mientras que los ejercicios prácticos tienen una dificultad similar a los incluidos en las listas de ejercicios proporcionadas en las clases prácticas durante el curso.

a) Para la ganancia del curso el alumno debe obtener como mínimo 25 de los 35 puntos sobre contenidos fundamentales.

b) Para la aprobación de la UC el alumno debe obtener como mínimo 25 de los 35 puntos sobre contenidos fundamentales y además 60 puntos en total.

En caso de no cumplir con la condición a) el alumno reprueba el curso y debe inscribirse nuevamente a la UC.

#### **A4) CALIDAD DE LIBRE**

Los estudiantes no podrán acceder a la calidad de libre.

#### **A5) CUPOS DE LA UNIDAD CURRICULAR**

Cupos mínimos: sin cupos

Cupos máximos: sin cupos