# La hipótesis de Riemann

Problema 8 de Hilbert y Problema 6 del Milenio.

**Alberto Verjovsky**

## Resumen

En una memoria histórica de sólo nueve páginas [1], enviada como un reporte a *Monatsberichte der Berliner Akademie* (*Informes mensuales de la Academia de Berlín*) y publicada en 1859, Bernhard Riemann obtuvo una fórmula analítica explícita para la cantidad de números primos que no exceden a un número dado. Esta fórmula se expresa en términos de los ceros de la función zeta de Riemann $\zeta$, es decir, las soluciones $\rho \in \mathbb{C}$ de la ecuación $\zeta(\rho) = 0$. La función $\zeta(x)$ fue definida para números reales $x > 1$ por Euler en en 1737 mediante la fórmula $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_{p \in P} \left( \frac{1}{1-p^{-x}} \right), \quad x > 1$ ($P$ es el conjunto de números primos). En su corto artículo Riemann extiende la función definida por Euler a todos los complejos, como función meromorfa, con un polo simple en $s = 1$. Por tal razón la función extendida $\zeta(s)$ se llama la función zeta de Riemann. El arículo contiene una gran cantidad de resultados e ideas, entre ellas la transformada de Mellin y la ecuación funcional

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s),$$

que implica $\zeta(-2n) = 0, n \in \mathbb{N}$ (los ceros "triviales" como lo sabía Euler).

Observa también que debería de haber una infinidad de ceros en la recta $Re(s) = \frac{1}{2}$. Demostraciones rigurosas de este hecho (y con estimación de su densidad) se deben a Hardy-Littlewood y Selberg.

En este mismo artículo Riemann especula que todos los ceros no triviales de hecho tienen parte real $\frac{1}{2}$, esta es la famosa *Hipótesis de Riemann.* En 1900 David Hilbert propuso dentro de sus influyentes 23 problemas a la hipótesis de Riemann como uno de los problemas más importantes dentro de todas las matemáticas (Problema 8). También es uno de los problemas del premio Millennium del *Clay Mathematics Institute*, de hecho, la hipótesis de Riemann es el único problema de los que propuso Hilbert que está en el Premio del Milenio del Instituto Clay de Matemáticas.

El objeto de la charla consiste en mostrar un panorama de este fascinante problema el cual interactúa con todos los ámbitos de las matemáticas.

## Referencias

[1] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monat. der Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre 1859 (1860), 671–680; also, Gesammelte math. Werke und wissensch. Nachlass, 2. Aufl. 1892, 136–144.