

# RUTA AL CAOS POR DUPLICACION DE PERIODO Y CASCADAS DE MULTIPLICACION

Eleonora Catsigeras \*

6 de mayo de 1997

## 1 Introducción

La renormalización de un sistema dinámico significa, a grandes razgos, la aplicación reiterada de una transformación del espacio en una región reducida del mismo, y la observación del nuevo sistema obtenido a través de un cambio de variables adecuado que agranda la pequeña región donde se efectúa la renormalización. Dicho de otra forma, la renormalización pasa de un sistema dinámico a otro que contempla el comportamiento del retorno a una región reducida del espacio.

En casos excepcionales el sistema renormalizado es idéntico al sistema global antes de renormalizar. Esta propiedad de autoidentidad caracteriza al llamado mapa de Feigenbaum en el intervalo, cuya gráfica se reproduce en la figura 4.

Buena parte de los sistemas renormalizables no son autoidénticos, pero son autosimilares: el renormalizado no copia idénticamente al sistema global, sino que lo imita deformándolo un poco. En particular, ya que el sistema original era renormalizable una vez, también lo será el sistema renormalizado.

Los sistemas llamados “cascadas” admiten que el proceso de renormalización pueda repetirse infinitas veces. En ellos el sistema renormalizado es a su vez renormalizable, y puede repetirse la operación una cantidad infinita numerable de veces. Contienen copias autosimilares al sistema global, éstas a su vez contienen nuevas copias más pequeñas autosimilares y éstas nuevas copias,... Cada copia deforma al sistema global y por eso en general no puede afirmarse que los renormalizados sucesivos sean convergentes. Pero, por ejemplo en el llamado atractor de Feigenbaum-Couillet-Trésser, los renormalizados pueden ser convergentes. En dicho atractor convergen al mapa de Feigenbaum.

---

\*IMERL Fac. Ingeniería C.C 30 Montevideo Uruguay. E-mail: eleonora@fing.edu.uy La autora agradece al PEDECIBA su apoyo financiero para la realización de este trabajo.

El atractor de Feigenbaum- Coulet y Trésser fue descubierto al final de la década del 70 [1, 3], como la conducta generada por una sucesión de bifurcaciones de duplicación de período. En la sección 3 se explicará este fenómeno, que consiste esencialmente en la evolución del sistema, al mover un parámetro, pasando de conductas estables a conductas caóticas, a través de una secuencia de bifurcaciones que van complicando paulatinamente su dinámica, y que acumulan en una cascada. En ese sentido la sucesión de bifurcaciones es una ruta al caos. La cascada en sí es inestable: se destruye con pequeñas perturbaciones. No es aún un sistema caótico porque no tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. Pero se conjetura que está en el borde del caos: pequeñas perturbaciones la conducen a conductas caóticas. En la sección 5 se exponen los resultados demostrados y los problemas abiertos en relación con esta conjetura.

Los atractores de Feigenbaum-Coulet y Trésser admiten además propiedades de universalidad: existen constantes que regulan la geometría microscópica del atractor y la relación de valores del parámetro entre dos bifurcaciones consecutivas de la sucesión que genera la cascada. Estas propiedades de universalidad fueron demostradas en [?] para esos atractores, pero no son válidas para otras cascadas [4].

En la sección 4 se expondrán otras pautas que son indicio de la presencia de una cascada, además de la autosimilitud y la universalidad.

En las primeras secciones nos restringiremos a las cascadas de duplicación, y en la sección 6 generalizaremos la definición para introducir las cascadas de multiplicación.

## 2 Cascadas de duplicación

Consideremos un sistema dinámico diferenciable por iterados en la bola cerrada  $n$ -dimensional  $B$ . Esto es una transformación  $F$  diferenciable que lleva cada punto de  $B$  en un punto de  $B$ , y el sistema de órbitas que genera por iteración. El punto  $y_0$  es un punto cualquiera de la bola  $B$ , llamado *estado inicial*. Su primer iterado es  $y_1 = F(y_0)$ , y su iterado  $n$ -ésimo es  $y_n = F(y_{n-1})$ . La sucesión  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  es la *órbita* (positiva) por  $y_0$ .

Por ejemplo, a partir de un flujo en que las órbitas son curvas continuas, se puede construir un sistema dinámico por iterados (o discreto) tomando  $F$  igual al primer retorno a una sección de Poincaré  $B$ .

**Definición 1**  $F$  es *renormalizable por duplicación* si se cumplen las siguientes condiciones (véase la figura 1):

1.  $F$  presenta un único punto fijo  $x_0$ , es decir  $F(x_0) = x_0$ , que es hiperbólico tipo silla de dimensión inestable uno: es decir, existe una subvariedad  $W^s(x_0)$  de dimensión  $n - 1$ ,

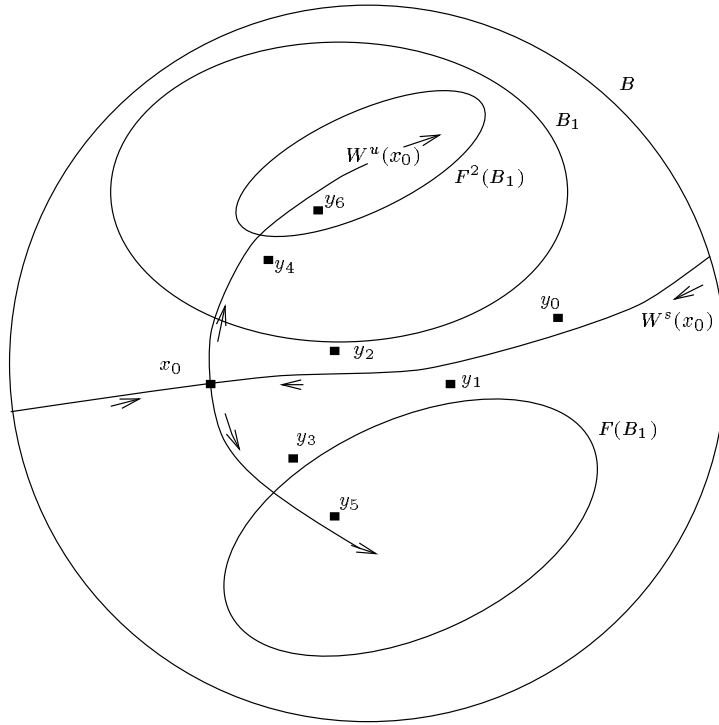


Figura 1:  $F$  es renormalizable por duplicación. Las órbitas que no están en  $W^s(x_0)$  entran finalmente en la región  $B_1$ , aproximándose a  $W^u(x_0)$  y alejándose del punto fijo  $x_0$ . De  $B_1$  pasan a  $F(B_1)$  y de allí vuelven a  $B_1$ .

llamada *variedad estable*, formada por todos los puntos cuyas órbitas tienden a  $x_0$ , y las restantes órbitas se aproximan a una curva  $W^u(x_0)$ , llamada *variedad inestable*, que se aleja de  $x_0$ .

2. Todas las órbitas, excepto las de  $W^s(x_0)$ , entran finalmente en una región  $B_1$ , difeomorfa a una bola cerrada, contenida en el interior de  $B$ . El subconjunto  $B_1$  es transformado por  $F$  en  $F(B_1)$ , disjunto con  $B_1$ . Este a su vez es transformado por  $F$  en  $F^2(B_1) = F \circ F(B_1)$ , contenido en el interior de  $B_1$

Consideremos  $F \circ F = F^2$ , restringida a  $B_1$ . Lleva cada punto de  $B_1$  en  $B_1$ . A su vez puede ser renormalizable por duplicación: habrá una región  $B_2 \subset B_1$  tal que  $F^2 \circ F^2(B_2) \subset B_2$ , y habrá un punto fijo tipo silla de  $F^2$ , es decir, una órbita periódica de período 2 de  $F$ .

Ahora,  $F^4$  restringida a  $B_2$  también puede ser renormalizable por duplicación:  $F$  tendrá también un punto periódico de período 4, tipo silla.

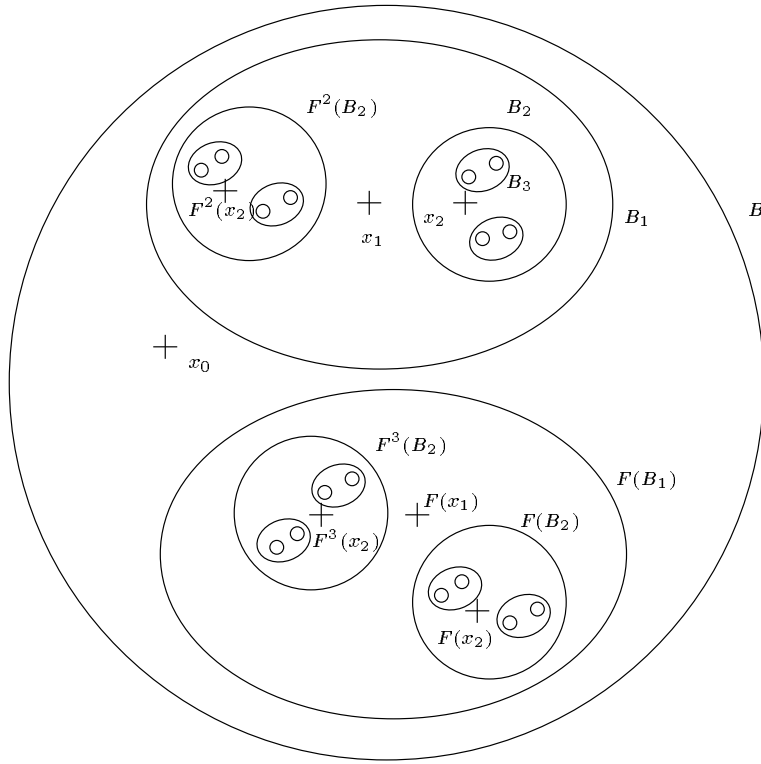


Figura 2:  $F$  es infinitamente renormalizable por duplicación,  $x_0$  es un punto fijo,  $x_1$  tiene período 2 y  $x_2$  tiene período 4.

**Definición 2**  $F$  es una *cascada de duplicación* si es infinitamente renormalizable por duplicación.

Obsérvese que si  $F$  es una cascada de duplicación, entonces tiene órbitas periódicas tipo silla de período  $2^N$  para todo  $N \geq 0$ . Todas las órbitas, excepto las de las variedades estables de las sillas, se acercan finalmente a regiones más pequeñas, encajadas sucesivamente (véase la figura 2). Si los diámetros de estas regiones tienden a cero cuando  $N$  tiende a infinito, entonces estas órbitas son atraídas por un conjunto de Cantor, obtenido como intersección de las sucesivas regiones encajadas.

Las cascadas de duplicación no presentan conducta caótica, porque no hay sensibilidad a las condiciones iniciales. Pero, bajo ciertas hipótesis, se demuestra que están en el borde del caos, como se explicará en la sección 5.

### 3 Generación de cascadas de duplicación

Supongamos que tenemos una familia  $\{F_t\}_{0 \leq t \leq 1}$  en un parámetro real  $t$ , de transformaciones diferenciables de  $B$  en  $B$ . Inicialmente, para  $t = 0$ ,  $F_0$  tiene un único punto atractor  $x_0$  de todas las órbitas de  $B$ , que es hiperbólico (un pozo). Describiremos una *secuencia de bifurcaciones de duplicación de período*. Para fijar ideas lo haremos en dimensión dos, pero los mismos conceptos pueden extenderse fácilmente a dimensión  $n$  cualquiera.

Los dos valores propios de la derivada  $DF_0(x_0)$  son menores que 1 en módulo, porque  $x_0$  inicialmente es un pozo, por hipótesis. Al mover el parámetro  $t$ , podemos empujar uno solo de los valores propios hasta atravesar el círculo unitario en  $-1$ , permaneciendo el otro valor propio menor que 1 en módulo.

El punto fijo  $x_0$ , que inicialmente era un pozo, se vuelve ahora una silla, con una dirección inestable: la que corresponde al valor propio con módulo mayor que 1 (véase la figura 3).

Se puede demostrar [5], que genéricamente nace una órbita periódica  $\{x_1, F(x_1)\}$  de período 2, atractora, que atrae todas las órbitas excepto las de la variedad estable de la silla fija. Ahora  $F^2$  tendrá dos pozos fijos:  $x_1$  y  $F(x_1)$ .

Este tipo de bifurcación se llama de *duplicación de período*.

Al observar las órbitas inmediatamente antes de la bifurcación se verá una dirección atractora débil (la que corresponde al valor propio cercano a  $-1$ ). La otra dirección contrae relativamente con mayor fuerza, por lo que las órbitas se verán achatadas siguiendo la dirección de atracción débil. Forman un *huso*, alrededor del pozo  $x_0$ , inmediatamente antes de la separación de éste en los dos puntos  $x_1$  y  $F(x_1)$ . (Véanse los cuadros 2 y 3 de la figura 3).

El punto atractor  $x_1$  de período 2, que nace en la bifurcación, lo hace también con una dirección contractiva débil, que corresponde al valor propio 1 de la derivada de  $F^2$  en  $x_1$ . Por lo tanto las órbitas también se verán alargadas en esa dirección, inmediatamente después de la bifurcación de duplicación de período. Las órbitas por  $F^2$  ahora se reparten entre  $x_1$  y  $F(x_1)$ .

Al continuar avanzando en los valores del parámetro  $t$ , el pozo  $x_1$  de  $F^2$  puede sufrir una nueva bifurcación de duplicación de período, y convertirse en una silla, generando una órbita atractora de período 4 para  $F$ . Para hacerlo, un valor propio de  $DF^2(x_1)$  debe atravesar el círculo unitario en  $-1$ . Pero en la primera bifurcación sus dos valores propios eran positivos porque correspondían a los valores propios de  $DF(x_0) \cdot DF(x_0)$ , que son el cuadrado de los valores propios reales de  $DF(x_0)$ .

Lo anterior implica que entre la primera bifurcación, que hizo aparecer la órbita de período 2, y la segunda, que hará aparecer la órbita de período 4, los valores propios de  $DF^2(x_1)$  deben

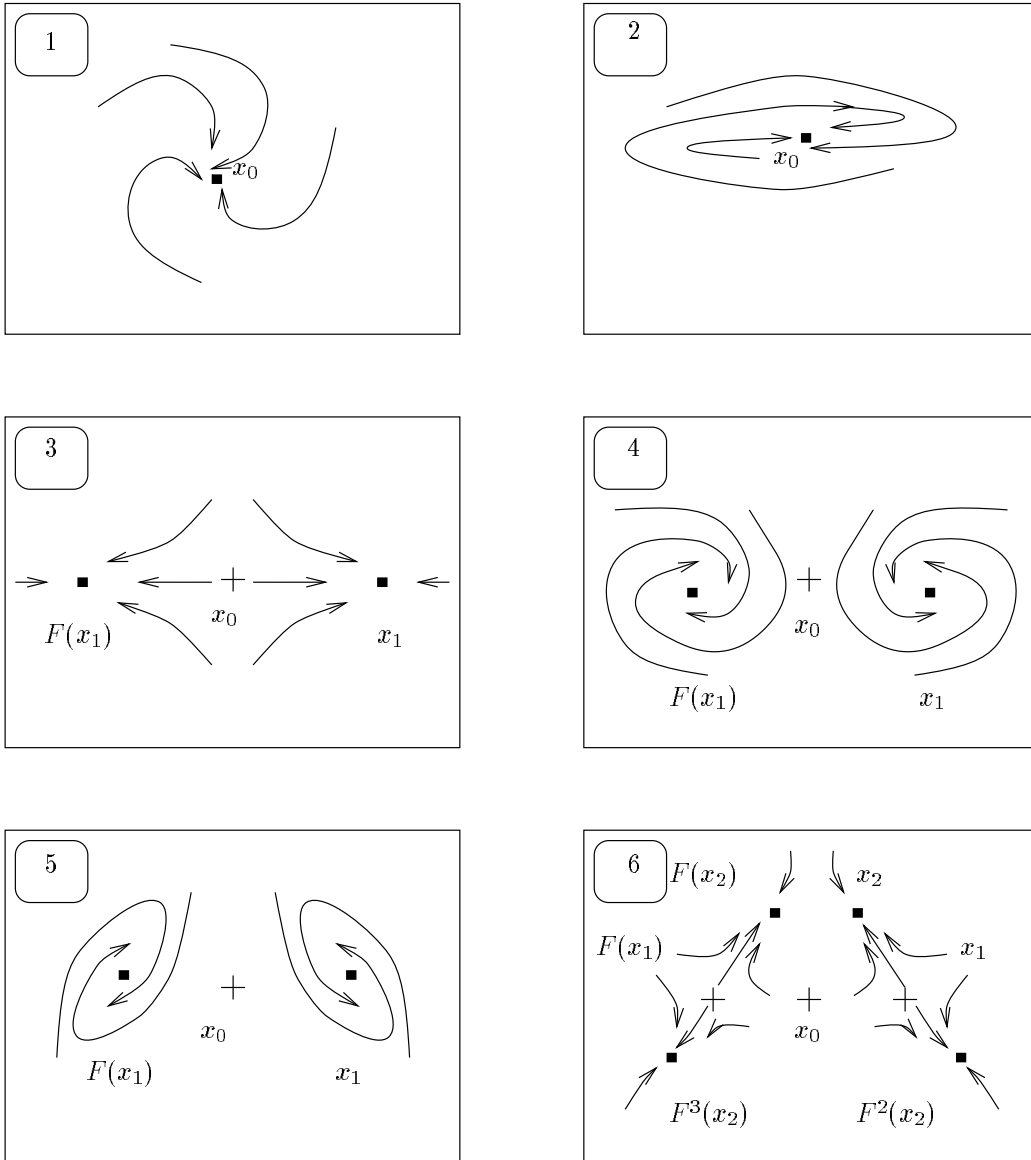


Figura 3: Dos bifurcaciones de duplicación de período sucesivas. Puede resultar sugestiva la semejanza de esta figura con la fotografía en [8] de la división celular.

pasar a ser complejos conjugados (por lo menos cuando estamos trabajando con difeomorfismos).

Como consecuencia, en algún lapso entre la primera y la segunda bifurcación, las órbitas alrededor de  $x_1$  según  $F^2$ , que nacen con una dirección alargada siguiendo la dirección atractora débil, deben adquirir una forma redondeada, dando vueltas alrededor de  $x_1$  (véase el cuadro 4 de la figura 3).

Inmediatamente antes de la segunda bifurcación, las órbitas deben formar nuevamente los husos alrededor de  $x_1$  y de  $F(x_1)$ , correspondientes al valor propio  $-1$  de  $DF^2(x_1)$ . (Véase el cuadro 5 de la figura 3).

Si al mover el parámetro  $t$  tenemos una sucesión de infinitas bifurcaciones de duplicación de período, para valores  $t_1, t_2, \dots, t_N \rightarrow t_\infty$  del parámetro, en cada una de ellas un pozo de período  $2^N$  se transforma en silla y genera un pozo de período  $2^{N+1}$ . Finalmente tendremos un valor  $t_\infty$  del parámetro en que no hay ningún pozo.  $F_{t_\infty}$  posee infinitas sillas, de períodos las potencias de 2, y sus órbitas, excepto las de las variedades estables de las sillas, son atraídas por un conjunto de Cantor. No es difícil probar que  $F_{t_\infty}$  es infinitamente renormalizable por duplicación, y por lo tanto es una cascada de duplicación.

## 4 Detección de las cascadas

Un conjunto de Cantor atractor de  $F$ , se llama atractor de Feigenbaum- Coulet- Trésser si  $F$  es infinitamente renormalizable por duplicación y se verifica la siguiente hipótesis sobre la distorsión microscópica: los renormalizados de  $F$  convergen al llamado mapa de Feigenbaum. Este mapa, cuya existencia y unicidad fue demostrada por Lanford, corresponde a la función analítica  $f$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , graficada en la figura 4, que cumple:

$$-\lambda^{-1} f \circ f(\lambda x) = f(x)$$

para cierto número real constante  $\lambda$ . Se demuestra que

$$\lambda = 0.3995 \dots \text{ constante universal espacial.} \tag{1}$$

El mapa de Feigenbaum se caracteriza por la propiedad de *auto-identidad*: es infinitamente renormalizable y sus renormalizados son iguales al mismo mapa  $f$ .

Los atractores de Feigenbaum-Coulet- Trésser no son necesariamente auto-idénticos, sino solo *auto-similares*, debido a que sus renormalizados convergen acercándose al mapa de Feigenbaum, pero pueden ser diferentes de él. La propiedad de auto-similitud indica que microscópicamente los iterados de la transformación copian, deformándola un poco, a la misma transformación.

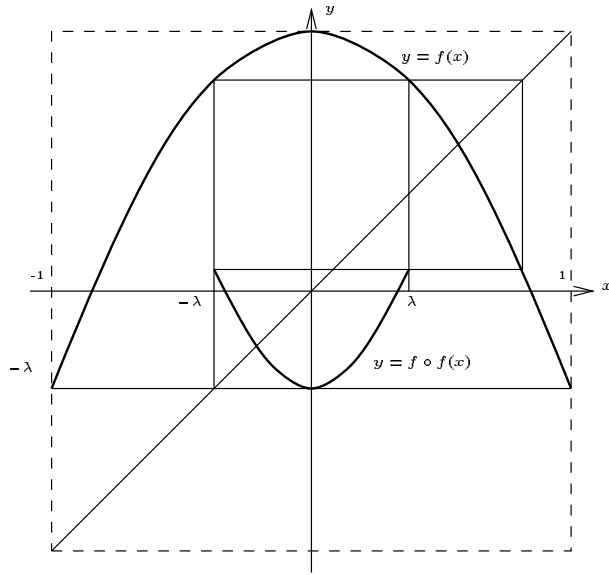


Figura 4: El mapa de Feigenbaum  $f$  en el intervalo  $[-1,1]$ .  $f \circ f$  restringido al intervalo  $[-\lambda, \lambda]$  copia al mismo mapa  $f$ .

Las sucesiones de bifurcaciones de duplicación de período que dan origen al atractor de Feigenbaum- Couillet- Trésser, cumplen genéricamente la siguiente ley de universalidad, descubierta experimentalmente por Feigenbaum [1], y demostrada por Lanford para transformaciones de dimensión uno, por Collet, Eckmann y Koch en dimensión  $n$  para transformaciones analíticas, por Davie para transformaciones suficientemente diferenciables del intervalo, y en [2] en dimensión  $n$  con suficiente diferenciable:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{t_{N-1} - t_N}{t_N - t_{N+1}} = 4.6692 \dots \text{ constante de Feigenbaum.} \tag{2}$$

Las dos leyes de universalidad (1) y (2) no son condiciones necesarias: hay ejemplos de cascadas en [4], donde no se cumplen. Pero son válidas para los atractores de Feigenbaum-Couillet-Trésser.

Para detectar una cascada en experimentos prácticos aparece la dificultad de su inestabilidad estructural, debido a que su proceso de formación es infinito: al perturbar genéricamente  $F$  se destruye la cascada. Lo que se puede ver es la dinámica estable de  $F_t$  para  $t$  cercano, pero no igual a  $t_\infty$ . Algunas pautas pueden ser las siguientes:

**La “división celular”:** La formación de un huso antes de la separación de las órbitas en dos



regiones disjuntas, que nacen alargadas pero se vuelven redondeadas, antes de la formación de nuevos husos para la próxima bifurcación. La repetición una cantidad infinita sucesiva de veces de este fenómeno.

**La “universalidad”:** La aproximación a la constante de Feigenbaum de las relaciones entre valores sucesivos del parámetro donde hay bifurcaciones, según la fórmula (2), y la aproximación a la constante espacial  $\lambda$  de la igualdad (1) en la geometría microscópica de la cascada.

**La “autosimilitud”:** Los iterados copian a la transformación global y estas copias se reproducen microscópicamente infinitas veces, unas dentro de otras.

**Las “brechas”:** La aparición de conjuntos de Cantor atractores. Estos se ven como una cantidad infinita de brechas, que van quedando relativamente limpias de órbitas, como se explica a continuación.

Un conjunto de Cantor en el intervalo cerrado  $I_0$  se obtiene retirando de  $I_0$  un intervalo intermedio, menor que  $I_0$ , abierto, llamado brecha inicial. Restan dos intervalos a ambos lados de la brecha inicial que llamaremos  $I_{1,1}$  e  $I_{1,2}$  respectivamente.

De cada uno de ellos se retiran intervalos intermedios abiertos (llamados brechas de generación uno), restando 4 intervalos cerrados  $I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}$  e  $I_{2,4}$  respectivamente. Los dos primeros están contenidos en  $I_{1,1}$  y los dos últimos en  $I_{1,2}$ .

A su vez, de cada uno de esos 4 intervalos se retiran intervalos intermedios (brechas de generación dos), restando 8 intervalos. Así sucesivamente se repite la operación un número infinito numerable de veces.

En el paso  $N$ -ésimo, se retiran de los  $2^N$  intervalos cerrados  $I_{N,j}$  que quedaron, con  $j = 1, 2, \dots, 2^N$ , las  $2^N$  brechas de generación  $N$ , restando  $2^{N+1}$  intervalos cerrados  $I_{N+1,j}$ , con  $j = 1, \dots, 2^{N+1}$ .

Si las longitudes de los intervalos cerrados que quedan en el paso  $N$ -ésimo tienden a cero cuando  $N \rightarrow \infty$ , entonces el conjunto no vacío  $K$ , restante al final de la operación anterior, es por definición un conjunto de Cantor. Se obtiene

$$K = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{j=1}^{2^N} I_{N,j}$$

Operaciones similares pueden realizarse en dimensión  $n$ , retirando inicialmente de una bola  $B$  una región abierta que deje dos sub-bolas cerradas, menores, contenidas en  $B$ . Para obtener el

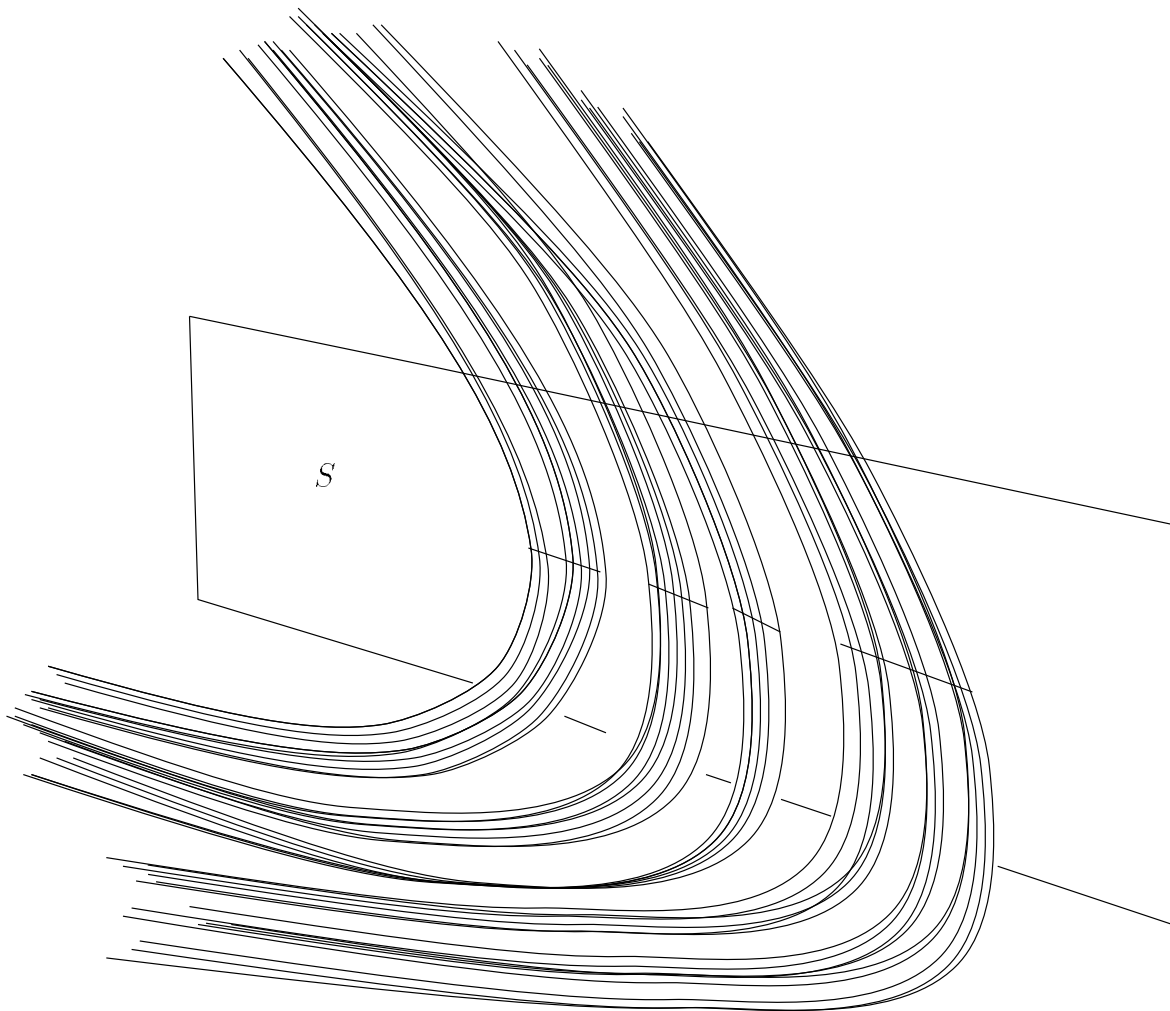


Figura 5: Flujo en dimensión tres que exhibe en la sección de Poincaré  $S$  un conjunto de Cantor atractor. Su atracción “limpia” una cantidad infinita numerable de brechas. Con fines recreativos compárese esta figura con la fotografía de las bandas de los anillos de Saturno, en [9].

conjunto de Cantor habrá que repetir ese proceso infinitamente en las sucesivas sub-bolas que van restando.

En el atractor de Feigenbaum-Coulet-Trésser en dimensión uno, que es un conjunto de Cantor en el intervalo, las brechas de generación  $N$  contienen a los repulsores de período  $2^N$ . En el atractor de una cascada de duplicación en dimensión  $n$ , las brechas (que son regiones abiertas de la bola  $B$ ), contienen a las sillas periódicas y a sus variedades estables.

Las brechas se ven como espacios relativamente limpios de órbitas, que separan trenes de puntos del conjunto de Cantor atractor. Por ejemplo, cuando se está analizando una dinámica continua y  $F$  es el retorno a una sección de Poincaré, las brechas se ven como bandas en un disco, relativamente libres de órbitas, y el atractor como infinitas pistas que se acumulan, separadas por las bandas, de ancho tan pequeño como se desee (véase la figura 5).

## 5 Cascadas de duplicación y caos

Las bifurcaciones homoclínicas son modificaciones globales de la dinámica de un sistema, originadas al mover uno o más parámetros, de modo de crear una intersección entre la variedad estable de un punto hiperbólico tipo silla y su variedad inestable.

La aparición de tangencias homoclínicas da lugar a cascadas de duplicación de período (teorema de Yorke-Alligood [5]), y también a dinámicas caóticas. Por ejemplo se ha probado la existencia de atractores extraños inmediatamente después de desdoblar genéricamente una tangencia homoclínica de un punto silla disipativo en dimensión dos. Este resultado también admite una generalización a dimensiones mayores. En [5] se exponen y demuestran los resultados obtenidos en los últimos años vinculando las tangencias homoclínicas con las conductas caóticas. En resumen, una familia genérica que bifurque en una tangencia homoclínica, exhibe, inmediatamente después de la bifurcación, conductas caóticas.

Una cascada de duplicación  $F$  no presenta conducta caótica porque no es sensible a las condiciones iniciales: casi todas las órbitas tienen la misma dinámica, teniendo como  $\omega$ -límite el conjunto de Cantor atractor. Sin embargo, en muchos casos conocidos la cascada  $F$  está en el borde del caos: tan cerca como se quiera de  $F$ , hay transformaciones  $G$  que exhiben tangencias homoclínicas, y por lo tanto conducen a conductas caóticas.

En varios ejemplos se dan cascadas de duplicación cuyo atractor, si bien es un conjunto de Cantor, no es un atractor de Feigenbaum-Coulet-Trésser: sus renormalizados no convergen al mapa de Feigenbaum. La cascada de Gambaudo y Trésser, construida en [4], es uno de ellos. Es una cascada auto-idéntica. En dimensión 2 se obtiene reproduciendo exactamente la dinámica de

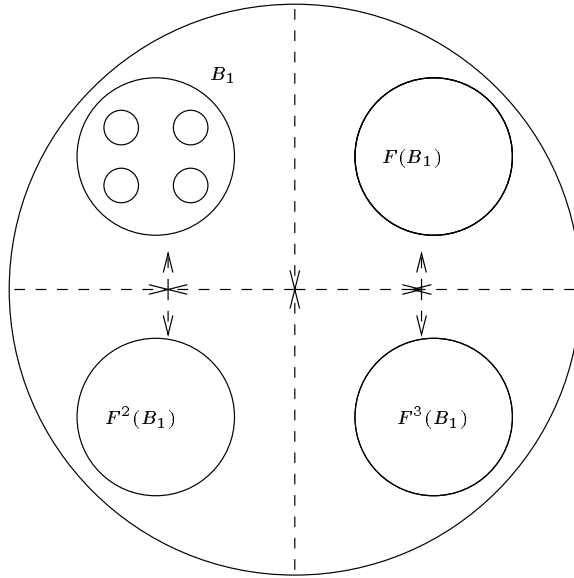


Figura 6: Cascada de Gambaudo y Trésser en dimensión dos.

una transformación  $F$  en la bola  $B$ , para que sea la misma que la dinámica de  $F^4$  restringida a una bola más pequeña  $B_1$ , contenida en  $B$ . (Véase la figura 6). Esta reproducción se realiza de modo que  $F$  actúe por traslación llevando  $B_1$  a  $F(B_1)$ , ésta a  $F^2(B_1)$ , luego a  $F^3(B_1)$  y finalmente devolviéndola a  $B_1 = F^4(B_1)$ . La construcción anterior se copia en una bola más pequeña contenida en  $B_1$ . Por medio de una cantidad infinita numerable de reproducciones como la anterior, en el límite se obtiene la cascada de Gambaudo-Trésser. No cumple las leyes de universalidad (1) y (2) descritas en la sección anterior. En [6] se ha demostrado que la cascada de Gambaudo-Trésser está en el borde del caos, porque es aproximable por tangencias homoclínicas.

Es una conjetura [5], cuya demostración general aún es un problema abierto, que los atractores de Feigenbaum- Couillet- Trésser están en el borde del caos. Como se dijo, estos atractores se caracterizan porque sus renormalizados convergen al mapa de Feigenbaum de la figura 4. Se demuestra que la dinámica por iteración del mapa de Feigenbaum está en el borde del caos. Esto permitió demostrar la conjetura agregando hipótesis adicionales: cuando  $F$  es cercano al mapa de Feigenbaum en el intervalo o al mapa de Feigenbaum en dimensión  $n$  [2], se puede perturbar  $F$  tan poco como se desee para crear tangencias homoclínicas. Sin embargo, cuando  $F$  está alejado del mapa de Feigenbaum, la aproximación de  $F$  con transformaciones que exhiban conductas caóticas continúa siendo un problema abierto.

## 6 Cascadas de multiplicación

La definición 1 se refiere a un mapa  $F$  renormalizable por duplicación. Análogamente puede definirse la renormalización por multiplicación con factor  $p \geq 2$ :

**Definición 3** Sea  $F : B \mapsto B$  diferenciable.  $F$  es *renormalizable por multiplicación con factor*  $p \geq 2$  si existe una región  $B_1$  en el interior de  $B$ , difeomorfa a una bola cerrada, tal que:

1.  $B_1, F(B_1), \dots, F^j(B_1), \dots, F^{p-1}(B_1)$  son conjuntos disjuntos dos a dos.
2.  $F^p(B_1)$  está contenido en el interior de  $B_1$ .

Si se verifica la definición anterior, entonces  $F^p$  lleva puntos de  $B_1$  en  $B_1$ .

A su vez  $F^p$  restringida a  $B_1$  puede ser nuevamente renormalizable por multiplicación con factor  $p_1$ : existirá una región  $B_2$  contenida en  $B_1$ , que es llevada sucesivamente por  $F$  en imágenes disjuntas dos a dos hasta el iterado  $pp_1 - 1$ , y finalmente  $F^{pp_1}(B_2) \subset B_2$ . Ahora  $F^{pp_1}$  restringida a  $B_2$  puede ser nuevamente renormalizable por multiplicación, con factor  $p_2$ .

**Definición 4**  $F$  es una *cascada de multiplicación* si es infinitamente renormalizable por multiplicación. Los sucesivos factores de multiplicación forman una sucesión  $p, p_1, p_2, \dots$  (véase la figura 7).

Las cascadas de duplicación son casos particulares de las de multiplicación, en las que la sucesión de factores es constante igual a 2. Es conveniente generalizar el concepto de cascada de duplicación, y llamar así a cualquier cascada de multiplicación en que la sucesión de factores es finalmente constante igual a 2 (es decir, todos los factores, excepto a lo sumo una cantidad finita, son iguales a 2).

Según lo observado en la sección anterior, las cascadas por duplicación no son caos, pero en muchos casos conocidos están en el borde del caos. Se puede demostrar, y no es complicado hacerlo, que la entropía de las cascadas de duplicación es nula.

La entropía de  $F$  es un número que mide el grado de desorden presente en la dinámica de  $F$ . Transformaciones que exhiben conductas caóticas tienen entropía positiva. Por otro lado, en dimensión dos, se ha probado que si la entropía es positiva, puede construirse subconjuntos con dinámica caótica (Teorema de Katok).

Si bien las cascadas de duplicación tienen entropía nula, y no son caóticas, esta propiedad parece ser exclusiva de ellas entre todas las cascadas de multiplicación. En [7] se demostró recientemente, en dimensión dos, que las cascadas de multiplicación que no son de duplicación, que tienen acotada la sucesión de factores, y que cumplen ciertas hipótesis de regularidad, tienen entropía positiva. Luego, exhiben dinámica caótica.

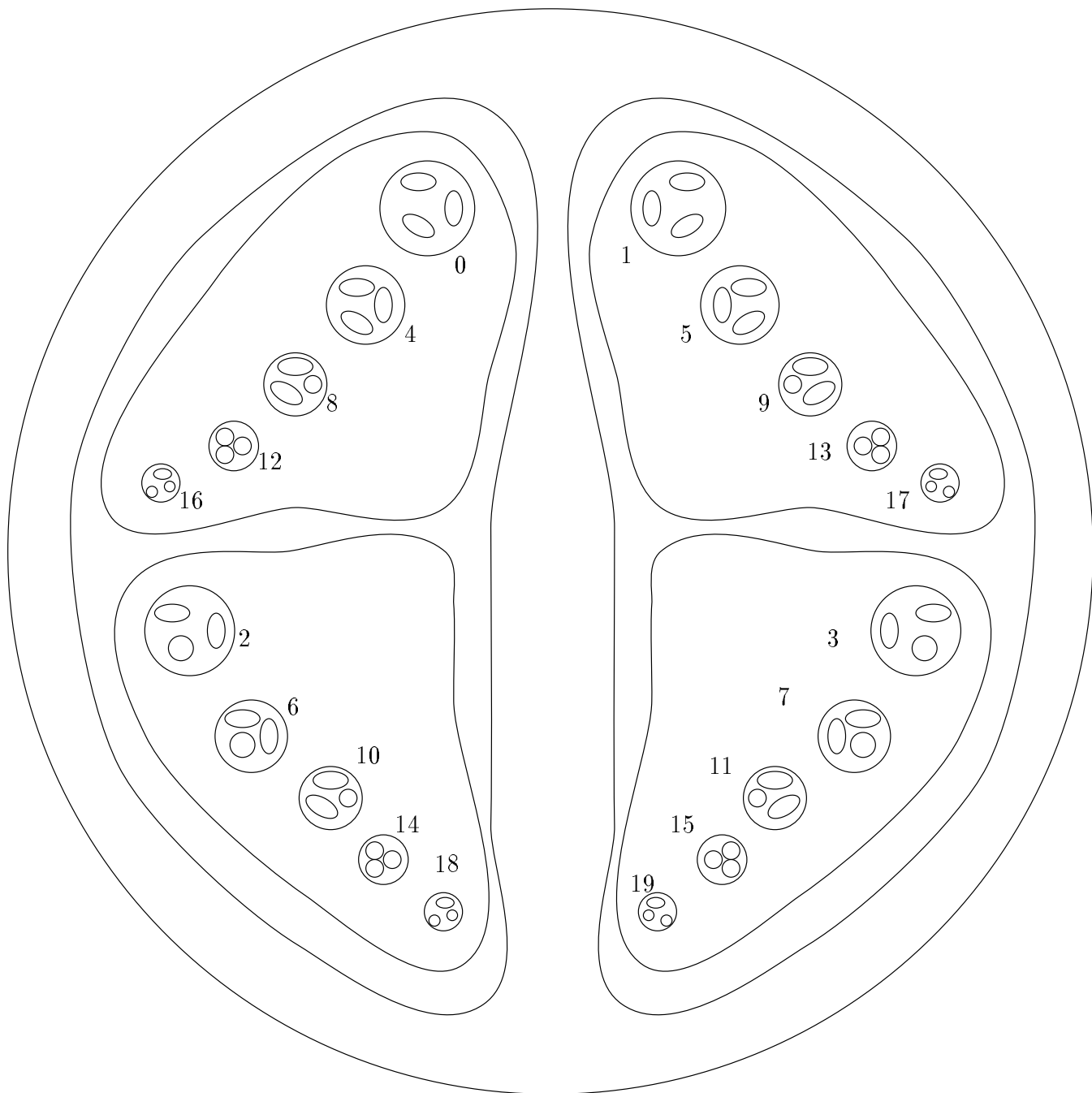


Figura 7: Cascada de multiplicación con factores 2,2,5,3,... El dibujo imita a las alas de la mariposa *Stichopthalma Camadeva* en [10].

## 7 Conclusión

Una sucesión de bifurcaciones de duplicación de período es una ruta al caos, en el sentido que conduce en el límite a una cascada  $F$  de duplicación, aumentando paulatinamente la complicación de la dinámica. A pesar de que las cascadas de duplicación no son ellas mismas dinámicas cóticas, se ha demostrado en los ejemplos estudiados que están en el borde del caos. Estos ejemplos fundamentan la conjetura de que cualquier cascada de duplicación de período está en el borde del caos.

En dimensión dos, las cascadas de multiplicación que no son de duplicación ya no están en el borde del caos, sino en el mismo caos: exhiben dinámicas sensibles a las condiciones iniciales. Esto está demostrado bajo ciertas hipótesis de regularidad y acotación. En su generalidad constituye un problema abierto.

En dimensiones mayores que dos, la relación entre caos y cascadas de multiplicación es aún desconocida.

### *Una anécdota*

*Hace ya algún tiempo Leticia, la mayor de las sobrinas de la autora, entonces con nueve años, quiso saber en qué estaba trabajando su tía. Ante la interrogante ésta acudió al artículo de divulgación [11], que a pesar de su antigüedad mantiene vigencia. Con sus gráficas y dibujos, este artículo permitió a la tía salir del aprieto. Pero entonces, hojeando las revistas, sobrina y tía terminaron mirando con interés otros artículos [8, 9, 10], no de Matemática, indudablemente muy atractivos, con fotografías en colores que ilustraron a ambas sobre lo que desconocían. Así la autora, en un juego infantil, incorporó a su explicación de las cascadas las fotos de la división celular, de las bandas de los anillos de Saturno, y de los patrones de color de una mariposa diurna. No hay ningún fundamento científico que permita vincular esos fenómenos. Pero ellos alimentan la esperanza de que las cascadas sean más que un invento intelectual, una manifestación de belleza en la Naturaleza. Por ahora para Leticia son simplemente un cuento de la tía.*

*La autora dedica este trabajo a la memoria de sus padres.*

## Referencias

- [1] M. J. Feigenbaum: *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*. Journ. Stat. Physics, vol 19 (25–52) 1978
- [2] E. Catsigeras, H. Enrich: *Homoclinic tangencies near cascades of period doubling bifurcations*. Ann. de l'IHP. Non linear Analysis. En prensa. 1997
- [3] P. Couillet, C. Trésser: *Itérations d'endomorphismes et groupe de rénormalisation*. C.R. Acad. Sci. Paris 287 (577–588) 1978

- [4] J. M. Gambaudo, C. Tresser: *Self similar constructions in smooth dynamics: rigidity, smoothness and dimension*. Comm. Math. Phys. 150 (45–58) 1992
- [5] J. Palis, F. Takens: *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge University Press 1993
- [6] E. Catsigeras: *Cascades of period doubling bifurcations in  $n$  dimensions*. Nonlinearity 9 (1061–1070) 1996
- [7] E. Catsigeras, J. M. Gambaudo, F. Moreira: *Infinitely renormalizable diffeomorphisms of the disk at the boundary of chaos*. Proc. of the AMS. En prensa.
- [8] P. Dustin: *Microtúbulos*. Investigación y Ciencia No. 49 (37–48) 1980
- [9] J. Pollack, J. Cuzzi: *Anillos en el sistema solar*. Investigación y Ciencia No. 64 (45–58) 1982
- [10] H.F. Nijhout: *Patrones de coloración de las mariposas diurnas y nocturnas*. Investigación y Ciencia No. 64 (70–81) 1982
- [11] D. Hofstadter: *Los atractores extraños son configuraciones en equilibrio entre el orden y el caos*. Investigación y Ciencia No. 64 (103–113) 1982