



Facultad de Ingeniería
Universidad de la República



Tesis de Maestría en Ingeniería Matemática
Director: Gabriel Usera

Flujo de fluidos estratificados

Juan Pablo Borthagaray

AGOSTO 2012
MONTEVIDEO - URUGUAY

RESUMEN. El flujo de un fluido estratificado en un canal abierto presenta un comportamiento más complejo que el de una capa homogénea. Una de las mayores dificultades para el estudio de este fenómeno es la ausencia de un único parámetro adimensionalizado (número de Froude) que caracterice al flujo. Es usual simplificar el problema considerando una estratificación discreta, suponiendo que el sistema está formado por dos o más estratos de densidad y velocidad uniforme.

La complejidad del flujo aumenta considerablemente con la cantidad de capas. Resulta relevante considerar la posibilidad de caracterizar cualitativa y cuantitativamente un flujo de esta complejidad mediante una o más capas activas. En este trabajo, se estudia bajo qué condiciones y hasta qué punto es viable simplificar el flujo en base a consideraciones de dicho tipo. Los resultados analíticos son contrastados con los obtenidos mediante simulaciones numéricas propias.

Índice general

Introducción	2
Capítulo 1. Preliminares	7
1.1. Ecuaciones de movimiento	7
1.2. Consideraciones acerca de fluidos perfectos incompresibles	8
1.3. Ecuaciones de aguas someras para un fluido homogéneo	9
1.4. Fluidos homogéneos en un canal abierto de ancho constante	12
1.5. Número de Froude y regímenes	15
1.6. Controles	16
1.7. Resaltos hidráulicos	18
1.8. Clasificación de flujo sobre topografía	20
1.9. Canales de sección transversal variable	23
1.10. Fluidos estratificados	24
Capítulo 2. Estabilidad lineal	28
2.1. Método de los modos normales	29
2.2. Teorema de Squire	33
2.3. Ecuación de Taylor-Goldstein	35
2.4. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz	37
2.5. Interfases de espesor no nulo entre capas infinitas	39
2.6. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en aguas someras	41
Capítulo 3. Flujos estratificados	47
3.1. Controles hidráulicos en flujos discretamente estratificados	47
3.2. Controles hidráulicos en fluidos continuamente estratificados	54
3.3. El número de Froude compuesto para un sistema con dos capas	55
3.4. Plano de números de Froude para flujos de dos capas	56
3.5. Resaltos internos	63
3.6. Clasificación del flujo de dos capas sobre topografía	66
Capítulo 4. Aproximación de flujos continuamente estratificados por modelos con estratificaciones discretas.	71
4.1. Controles y regularidad en un sistema de tres capas	71
4.2. Soluciones en el espacio de números de Froude	74
4.3. Experimentos para flujos a través de contracciones	78
4.4. Experimentos para flujos sobre un obstáculo	86
4.5. Conclusiones	90
Bibliografía	94

Introducción

El flujo de un fluido homogéneo y no viscoso a través de un canal con topografía es un fenómeno estudiado y conocido en profundidad. Si bien existen algunos fenómenos que en principio parecen inesperados, como son los resaltos producidos por una variación en la altura del fondo del canal, son bien conocidos ciertos principios básicos y nociones que permiten explicar adecuadamente estos fenómenos.

Por otra parte, el interés por estudiar flujos de fluidos estratificados data de la década de 1950, y tiene su base en el deseo de comprender la dinámica de la atmósfera y de los océanos. La estratificación de fluidos es un fenómeno común debido a diferencias en su densidad, composición o temperatura. Con este trabajo se pretende contribuir a comprender de mejor manera los fluidos estratificados, ya que afectan al hombre y sus actividades de diversas maneras, y su comprensión aún está muy lejos de estar completa. Para marcar la importancia de estudiar flujos estratificados, citemos algunos fenómenos asociados a la estratificación de la atmósfera.

Las heladas de radiación ocurren en noches de cielo despejado, con ausencia de brisa y de niebla. El suelo se enfría por radiación infrarroja hacia el espacio, enfriando a su vez al aire; este fenómeno de enfriamiento es más pronunciado en las primeras decenas de metros de la atmósfera. Se tiene así una *inversión térmica*: en esta situación, en la porción más baja de la atmósfera, contrariamente a lo que ocurre durante el día, la temperatura aumenta con la altura. Estas condiciones atmosféricas, en las que la densidad del aire disminuye con la altura, son estables y permanecen hasta que al salir el sol, aumenta la temperatura del suelo, y en consecuencia la del aire. En nuestro país, las heladas de radiación pueden ocurrir algunas decenas de veces al año, representando en cultivos de cítricos y viñedos pérdidas estimadas en 10 millones de dólares anuales.

Como los movimientos de las partículas se ven restringidos verticalmente, las inversiones térmicas pueden atrapar nubes, humedad y contaminación de capas próximas a la superficie, pues se reduce la dilución de emisiones en el aire. En grandes ciudades, esto puede causar que gases de escape de automóviles u otros contaminantes alcancen altas concentraciones. Este problema puede ser agravado aún más si el centro urbano se encuentra rodeado de montañas, pues estas dificultan que la nubosidad se disipe. El *smog*, mezcla de aire contaminado y niebla, significa un gran problema sanitario en varias ciudades, aumentando la tasa de afecciones respiratorias y elevando la mortalidad por otras afecciones en poblaciones de riesgo.

En caso de que la topografía del terreno presente pendientes significativas, la estratificación de la atmósfera puede tener como consecuencia el desplazamiento de grandes masas de aire. Los estratos de aire más fríos -y por tanto más densos- se trasladan desde las zonas altas a las zonas bajas, aumentando el caudal movido con la longitud de la pendiente. Este hecho es denominado *viento de pendiente*. Si se

tiene una planta emisora sobre una ladera, estos vientos de pendiente confinan la difusión de contaminantes a su altura, afectando potencialmente a centros poblados que se ubiquen pendiente abajo respecto a la planta. Asimismo, en una explotación minera a cielo abierto, debido al trabajo nocturno en los pozos de extracción, el aire en estos suele presentar altas concentraciones de polvo durante las noches. Al desarrollarse vientos de pendiente, el aire más pesado ingresa a los pozos de extracción, desplazando al aire con polvo del interior y transportándolo ladera abajo. De existir centros poblados zonas de la ladera más baja que el pozo de extracción, estos son afectados por el aire contaminado.

En el Desierto de Atacama -conocido como el más árido del mundo- el fenómeno de inversión térmica juega un rol preponderante para su sequedad. La corriente de Humboldt transporta agua fría desde la Antártida hacia el norte a lo largo de la costa chilena y peruana. Esta agua enfría las brisas marinas del oeste hacia el desierto, reduce la evaporación y crea una inversión térmica, impidiendo la formación de nubes grandes, productoras de lluvias. La Cordillera de la Costa, que delimita la frontera oeste del Desierto de Atacama, condensa la totalidad de la humedad de la brisa marina; el Altiplano impide el ingreso por el este de las corrientes de aire húmedo provenientes de la cuenca del Amazonas.

Entre los fluidos estratificados, debemos distinguir aquellos en los que la densidad varía en forma continua según la altura, a los que nos referiremos como *continuamente estratificados*, de aquellos que presentan discontinuidades. Un caso particular de estos últimos fluidos son aquellos en los que los perfiles verticales de densidad son constantes a trozos, de modo que se tiene una determinada cantidad de capas; a estos los llamaremos *discretamente estratificados*.

El ejemplo más simple que podemos considerar de fluido estratificado es uno constituido por dos capas uniformes. Ya en el estudio del flujo de estos fluidos surgen nuevos fenómenos respecto al de un fluido homogéneo. Por ejemplo, el sistema reacciona de forma distintas a contracciones laterales respecto de cambios en el fondo del canal. Mientras que las primeras afectan a las dos capas por igual, los segundos solo afectan al estrato superior de forma indirecta. El estudio de estos sistemas se ha realizado a partir de diversos enfoques, que tienen su contrapartida en la hidráulica de canales. Armi [2] empleó un enfoque basado en los números de Froude internos de las capas, y en un número de Froude compuesto para el sistema. En cambio, Denton [20] y Lawrence [35] utilizaron curvas de energía interna en función de la posición de la interfase para identificar la ubicación de los controles hidráulicos y realizar esquemas de clasificación de flujos de dos capas. Dalziel [17] extendió a flujos de dos capas el funcional hidráulico de Gill [25], aplicable a problemas de tipo hidráulico [15].

Tanto en el caso en que las dos capas tienen velocidad con igual sentido [2], como en el que tienen sentido opuesto [3, 22], se han realizado simplificaciones adicionales sobre los modelos, suponiendo en ciertos casos la existencia de una única *capa activa*. Por capa activa, entendemos aquella que domina la dinámica de la interfase; esta simplificación es adecuada cuando el número de Froude interno de una de las capas -la pasiva- es pequeño en todo el canal. Una vez que la capa activa es identificada, la dinámica de ésta será como la de un fluido homogéneo en un canal a superficie libre, sustituyendo el número de Froude habitual por uno interno.

Otra hipótesis habitual en el estudio de la dinámica de estos sistemas es la de suponer que se encuentran acotados superiormente por una tapa rígida. Con esta simplificación, que es válida si los números de Froude externos de las capas son pequeños, se ignora la dinámica de la superficie libre, y sólo se tiene en cuenta la dinámica interna.

En los sistemas formados por dos capas también se pueden presentar resaltos hidráulicos en la interfase entre los fluidos. Si la variación de la posición de la interfase a lo largo de un resalto es pequeña, entonces éste será similar a los saltos ondulares que ocurren en flujos de capas homogéneas en canales abiertos. Pero si el salto es pronunciado, en la interfase pueden ocurrir inestabilidades y producirse mezcla entre las capas. Esta mezcla afectaría a las condiciones del flujo aguas abajo del resalto, e implica una nueva incógnita a determinar para resolver el flujo. Es necesario incluir alguna hipótesis adicional. En el trabajo de Yih y Guha [54], que fue pionero en el estudio de estos resaltos internos, se supuso que las presiones son hidrostáticas a lo largo del salto. En cambio, Wood y Simpson [53] asumieron que las pérdidas de energía en la capa que se contrae en el salto son pequeñas, y que el momento total del sistema permanece constante. Estos trabajos ofrecen buenos resultados para saltos débiles. Holland et al. [27] presentaron un enfoque para casos en los que la capa superior tiene gran altura y velocidad mucho menor que la inferior, y que toda la mezcla ocurre debido a la entrada del fluido más liviano en la capa más pesada. Allí, se supuso que la energía disipada en el salto se transforma esencialmente en turbulencia, y a partir de esta hipótesis obtuvieron cotas para la cantidad de mezcla posible, para los números de Froude de las capas aguas arriba y abajo del salto, y para los cocientes de velocidades y alturas de la capa activa entre esas mismas secciones.

Los flujos estratificados en la naturaleza suelen poseer una distribución de densidades continua. Sin embargo, ante la presencia de topografía, estos suelen responder evolucionando a un comportamiento en capas, con regiones de fluido en reposo separando la porción de fluido que sigue al obstáculo del que no. Esta separación justifica realizar análisis en capas en estos casos, como los realizados por Wood [52] para la extracción selectiva de un reservorio, o por Smith [46] para vientos de pendiente sobre montañas. Asimismo, varios investigadores han realizado modelos con estratificaciones discretas para explicar sus observaciones de campo, como Farmer y Denton [23], Smeed [45] o Armi y Farmer [4]. Con estas simplificaciones, es posible obtener información relevante acerca de los flujos reales, como la velocidad de ciertos estratos, el caudal circulante, detectar la presencia y ubicación de controles hidráulicos, así como describir otros aspectos cualitativos del flujo, tales como cuáles son los estratos que dominan la dinámica del sistema.

La idea de aproximar un sistema continuamente estratificado, con un perfil de velocidades horizontales continuo, por uno discretamente estratificado en el que la velocidad de cada capa es uniforme, fue introducida por Benton [13]. En dicho trabajo, se aproximaron las celeridades de ondas gravitacionales largas para fluidos continuamente estratificados por las correspondientes a un sistema con una cantidad suficientemente grande de capas.

Un aspecto adicional a tener en cuenta al estudiar un sistema es el de su respuesta ante un pequeño cambio en el mismo. Si se perturba un sistema dado, y la amplitud de la perturbación aumenta en el tiempo, diremos que el sistema es *inestable*. Particularmente, es conveniente preguntarse si la respuesta de un fluido

continuamente estratificado ante una perturbación es similar al de su aproximación con estratificación discreta. En un sistema con n capas a superficie libre, la estabilidad es *marginal*: la amplitud de las perturbaciones se mantendrá constante. La celeridad de estas perturbaciones se puede manifestar en $n - 1$ *modos internos* o uno *externo*, que corresponde al que define estado crítico en el flujo de una capa homogénea; si se realiza la hipótesis de tapa rígida, se descarta la posibilidad de que exista el modo externo. Las relaciones de dispersión para estos sistemas discretos tienen la forma de un polinomio de grado n . En cambio, la estabilidad de un fluido continuamente estratificado está dada por la ecuación de Taylor-Goldstein, que suele requerir de una resolución numérica. Así, cabe preguntarse si la estabilidad de una aproximación por capas es suficiente para determinar la estabilidad de un flujo con estratificación continua.

En este trabajo se analiza la posibilidad de aproximar flujos continuamente estratificados, con perfiles de velocidad continuos, por modelos en capas en canales en los que varía el ancho o la altura del fondo. En particular, se sigue el enfoque del plano de números de Froude introducido por Armi [2], y se lo extiende a flujos para tres capas. Se utiliza el espacio de números de Froude para estimar los perfiles de velocidades y densidades de los flujos aguas abajo de la sección de mayor constricción del canal. Los resultados obtenidos en esta tesis pueden ser aplicados tanto a fenómenos atmosféricos -particularmente los mencionados anteriormente- como a problemas en cuerpos de agua.

El primer capítulo está dedicado a presentar las herramientas habituales para estudiar la dinámica de una capa homogénea en un canal abierto. Se derivan las ecuaciones de aguas someras para un fluido homogéneo, y con ellas se determina la velocidad de las perturbaciones en la superficie libre de dicho fluido. Esta celeridad de las ondas largas permite definir el número de Froude. También se define la energía específica y la función de momento, con las que se puede establecer la variación de altura del fluido a través de un resalto hidráulico, así como obtener un esquema de clasificación del flujo estacionario de un fluido homogéneo sobre un obstáculo. Este primer capítulo concluye con algunas nociones acerca de fluidos estratificados, como la aproximación de Boussinesq, y una breve comparación entre estratificaciones continuas y discretas.

En el segundo capítulo se estudia la estabilidad lineal de un sistema. En primer lugar, se presenta una herramienta habitual para el análisis de estabilidad, el método de los modos normales. Este método tiene un complemento importante en el teorema de Squire, que permite asumir que las perturbaciones impuestas al sistema sean bidimensionales. Luego se trata la estabilidad de flujos continuamente estratificados, y se muestra la ecuación de Taylor-Goldstein. Las inestabilidades que se producen en la interfase entre dos capas uniformes, llamadas inestabilidades de Kelvin-Helmholtz, son tratadas a continuación. Primero, suponiendo que la interfase tiene espesor nulo, siendo posible trabajar analíticamente; después en el caso en que la interfase tiene espesor positivo, para el que es necesario resolver numéricamente la ecuación de Taylor-Goldstein. Una vez comparados estos dos casos, se trata la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz asumiendo que estamos en condiciones de aguas someras.

El tercer capítulo de este trabajo comienza definiendo controles hidráulicos en flujos con estratificaciones discretas, comparando el caso en que el sistema se encuentra confinado superiormente con el que tiene su superficie superior libre. Allí se discute la validez de la hipótesis de tapa rígida. Las condiciones para flujo crítico en fluidos continuamente estratificados pueden ser bastante más complicadas; en la sección 3.2 se sintetizan algunos resultados de Killworth [30] para este problema. El resto del capítulo trata sobre flujos de dos capas. Se define un número de Froude compuesto y el plano de números de Froude para este caso. También se analizan los resaltos en la interfase entre dos fluidos homogéneos. La última sección presenta un esquema de clasificación del flujo estacionario de dos capas en un canal de ancho constante con un obstáculo en el fondo, introducido por Lawrence [35].

Los sistemas de tres capas empleados para aproximar flujos de fluidos continuamente estratificados son tratados en el capítulo 4. En base a consideraciones sobre la regularidad de estos sistemas, se define un número de Froude compuesto. Luego, se presenta el espacio de números de Froude y se muestra el comportamiento asintótico de las curvas solución en este espacio. Se realizaron simulaciones numéricas con el código CAFFA3D.MB para obtener las soluciones de flujos continuamente estratificados en canales con ancho variable o con un obstáculo en el fondo, y se las comparó con experiencias de laboratorio documentadas en la bibliografía. Los resultados de estos experimentos numéricos fueron contrastados con los de los modelos en tres capas en las secciones 4.3 y 4.4. En estas también se considera la posibilidad de trabajar con capas activas, y de simplificar aun más el análisis al tener en cuenta el acoplamiento entre dos capas. El trabajo concluye con una discusión acerca del alcance y limitaciones de estas aproximaciones de flujos continuamente estratificados por modelos en capas.

Preliminares

Un fluido estratificado es aquel en el que la densidad varía espacialmente. Tales fluidos pueden ser encontrados tanto en la atmósfera -donde la variación de densidad del aire se debe a la variación de la temperatura- como en cuerpos de agua, en los que la estratificación se debe principalmente a la variación de salinidad o de temperatura.

Con el objetivo final de analizar el flujo de fluidos estratificados no viscosos, es necesario comprender las propiedades de los flujos homogéneos. Las secciones 1.1, 1.2 y 1.3 presentan las ecuaciones que gobiernan el movimiento de estos fluidos bajo determinadas hipótesis adicionales. Luego se estudia el flujo de estos fluidos en canales abiertos, tanto de ancho constante (sección 1.4) como variable (sección 1.9). También son introducidos algunos conceptos y herramientas necesarias para el análisis de dichos problemas: en la sección 1.5 se definen el número de Froude y los distintos regímenes de flujo, en las secciones 1.6 y 1.7 se presentan los controles y resaltos hidráulicos, respectivamente. Estas herramientas son utilizadas en la sección 1.8, en la que se presenta una clasificación de flujos estacionarios unidimensionales sobre topografía.

Por otra parte, en la sección 1.10 se tratan los fluidos estratificados, la aproximación de Boussinesq y se describen algunos trabajos en los que se utilizaron modelos en capas para analizar flujos continuamente estratificados.

Todas las funciones que intervienen en este trabajo se suponen tan regulares como sea necesario para que los resultados presentados sean válidos.

1.1. Ecuaciones de movimiento

Consideremos un fluido viscoso que ocupa una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sometido únicamente a la acción de la gravedad. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de dicho fluido son

$$(1.1) \quad \begin{cases} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{u} \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} .$$

Aquí $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ es el campo de velocidades del fluido en el punto $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$ en el instante t , $p(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ es el campo de presiones y $\rho(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^+$ el campo de densidades. Las constantes $\mathbf{g} = (0, 0, -g) \in \mathbb{R}^3$ y $\mu \geq 0$ denotan el campo gravitatorio y la viscosidad del fluido respectivamente; el símbolo $\frac{D}{Dt}$ denota derivadas a lo largo de trayectorias. Las ecuaciones (1.1) son conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes; nos referiremos a la primera de ellas como ecuación de conservación de momento y a la segunda como ecuación de conservación de masa.

Supondremos que la densidad de cada partícula de fluido permanece constante a lo largo de las trayectorias pese a variaciones de la presión. Llamaremos *incompresible* a un fluido con esta propiedad, y su densidad debe satisfacer la ecuación

$$(1.2) \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Si además despreciamos los efectos de la viscosidad, tomando $\mu = 0$ en (1.1), obtenemos las conocidas ecuaciones de Euler para un fluido perfecto incompresible:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}.$$

En adelante trabajaremos con fluidos perfectos e incompresibles. Dada una región $D \subset \Omega$, llamamos *cantidad de movimiento* (o *momento*) en D a

$$Q(D, t) = \int_D \rho \mathbf{u} dV.$$

Utilizando las ecuaciones de Euler junto al teorema de la divergencia, obtenemos la ecuación de balance mecánico en D ,

$$\frac{DQ}{Dt}(D, t) = \int_D \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_{\partial D} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} dA = \int_{\partial D} -pn dA + \int_D \rho \mathbf{g} dV,$$

donde n denota a la normal saliente de D .

1.2. Consideraciones acerca de fluidos perfectos incompresibles

1.2.1. Movimientos irrotacionales. Dado un fluido que se mueve con velocidad \mathbf{u} , definimos su vorticidad $\omega = \frac{1}{2} \nabla \wedge \mathbf{u}$. Al realizar la descomposición de $\nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ en su parte simétrica y antisimétrica -llamadas matriz de deformación y matriz de rotación respectivamente-, se puede observar que la vorticidad es el vector naturalmente asociado a la matriz de rotación (ver [40], sección 1.4).

Una de las características fundamentales de los fluidos perfectos incompresibles es la conservación de la vorticidad a lo largo de las líneas de flujo. Si en un instante dado t_0 , en una región Ω la vorticidad es nula, entonces en cualquier instante posterior, en la porción del fluido que se desplazó a partir de Ω según el flujo, la vorticidad permanece nula.

PROPOSICIÓN 1.1 (Lagrange). *Dado un fluido perfecto incompresible, que se mueve únicamente bajo la acción de una fuerza de masa proveniente de un potencial univalente¹, sea φ el flujo correspondiente a su campo de velocidades \mathbf{u} . Si en un instante t_0 , en una región Ω se cumple $\nabla \wedge \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$, entonces para todo $t > t_0$ se cumple $\nabla \wedge \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \forall \mathbf{x} \in \varphi(\Omega, t_0, t)$.*

Este resultado nos asegura que en un movimiento de un fluido perfecto incompresible en los que la vorticidad sea nula en un instante t_0 , la misma permanecerá nula en todo instante posterior. Llamaremos *irrotacionales* a los movimientos en los que la vorticidad es constantemente nula.

¹Un campo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ proviene de un potencial univalente si existe una función $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, tal que $F = \nabla \psi$. En este capítulo, la única fuerza de masa que se considera es la gravitatoria, que es de la forma $F = \mathbf{g} = \nabla(-gz)$.

1.2.2. Existencia de potenciales. Otra consecuencia importante de la proposición 1.1 se obtiene cuando se la combina con el siguiente resultado:

LEMA 1.2 (Lema de Poincaré). *sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto y contractible², y sea X un campo en Ω . Si $\nabla \wedge X(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$, entonces existe $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X = \nabla\phi$.*

Aplicando este lema en cada instante para un movimiento irrotacional de un fluido perfecto incompresible de densidad constante ρ_0 , podemos construir un potencial $\phi(\cdot, t)$, de forma tal que $\nabla\phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. De este modo, sustituyendo \mathbf{u} en las ecuaciones de Euler (1.3),

$$\begin{cases} \rho_0 \left[\frac{\partial \nabla\phi}{\partial t} + (\nabla\phi \cdot \nabla)\nabla\phi \right] = -\nabla p + \rho_0 \mathbf{g} \\ \Delta\phi = 0 \end{cases} .$$

Observemos que $(\nabla\phi \cdot \nabla)\nabla\phi = (\nabla \wedge \nabla\phi) \wedge \nabla\phi + \nabla \left(\frac{|\nabla\phi|^2}{2} \right) = \nabla \left(\frac{|\nabla\phi|^2}{2} \right)$, de forma que se cumple:

$$(1.4) \quad \begin{cases} \nabla \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \mathbf{g} \\ \Delta\phi = 0 \end{cases} .$$

1.2.3. Función de Bernoulli. Denotaremos por y a la coordenada vertical. Como $\mathbf{g} = (0, -g, 0) = \nabla(-gy)$, la primera de las ecuaciones de arriba puede ser reescrita como

$$\nabla \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + gy \right] = 0.$$

De esta forma, tendremos que para todo instante t ,

$$(1.5) \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + gy = H(t).$$

A esta función H se la conoce como *función de Bernoulli*.

1.3. Ecuaciones de aguas someras para un fluido homogéneo

1.3.1. Planteo de las ecuaciones. Supongamos que tenemos un fluido homogéneo, de densidad $\rho = \rho_0$ constante, ocupando una región en la que la escala horizontal es mucho mayor que la vertical (ver figura 1.1). Supongamos también que la velocidad horizontal no depende de y , que la velocidad vertical es despreciable comparada con la horizontal, así como sus derivadas, y que la presión por encima del fluido es constante p_0 . En este caso, la componente vertical de la ecuación de Euler (1.3) queda

$$(1.6) \quad 0 = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + g.$$

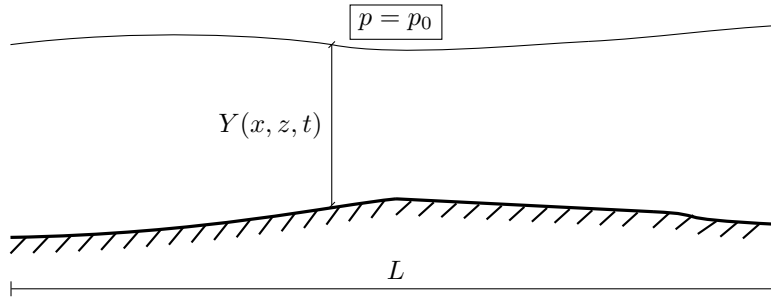
Integrando esta ecuación respecto a y entre la superficie libre y una altura arbitraria, obtenemos

$$(1.7) \quad p(\mathbf{x}, t) = p_0 + g\rho_0(Y(x, z, t) - y).$$

De este modo, las componentes horizontales de la ecuación de Euler quedan:

$$(1.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \frac{\partial Y}{\partial z} \end{cases} .$$

²Un espacio topológico se dice contractible si es equivalente homotópicamente a un punto.

FIGURA 1.1. Problema de aguas someras. Aquí se supone $Y \ll L$.

Este sistema de ecuaciones es conocido como ecuaciones de aguas someras para un fluido perfecto homogéneo.

1.3.2. Perturbaciones en un problema de aguas someras. Consideremos un movimiento irrotacional de un fluido perfecto de densidad ρ_0 , que supondremos se encuentra formando una capa de espesor Y constante, limitado inferiormente por un piso, y que superiormente está en contacto con una atmósfera a presión p_0 (que por simplicidad consideraremos 0). Tomamos el nivel $y = 0$ en la superficie libre del fluido, cuyo movimiento supondremos plano. En este caso, si consideramos el análisis presentado al comienzo de esta sección, bajo las hipótesis allí presentadas, tendremos que para cualquier campo de velocidades la distribución de presiones correspondiente tendrá que ser hidrostática (1.7).

Ahora consideremos que el fluido presenta un estado inicial estacionario en que su velocidad es constante: $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, 0, 0)$. Al fluido en este estado le aplicamos una perturbación en la superficie libre, que en el estado perturbado se encuentra a una altura $\eta(x, t)$. Llamemos $\tilde{\mathbf{u}}$ a la velocidad en el estado perturbado. Queremos verificar la equivalencia entre las siguientes suposiciones:

HIPÓTESIS 1 (Aguas someras). En el estado perturbado, la velocidad horizontal no depende de y , y la velocidad vertical es despreciable comparada con la horizontal: $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = (\tilde{u}(x, t), \tilde{v}(x, y, t), 0)^3$, con $|\tilde{v}| \ll |\tilde{u}|$.

HIPÓTESIS 2 (Hidrostática). La distribución de presiones tanto en el estado inicial del fluido como en el perturbado es hidrostática (1.7).

HIPÓTESIS 3 (Ondas largas). Dada una perturbación de pequeña amplitud en la superficie libre del fluido, de la forma $\eta = a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right) = a \cos(kx - \omega t)$, se cumple que el producto entre el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ por el alto de la capa Y verifica

$$kY \ll 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Ya vimos que la hipótesis 1 implica la hipótesis 2.

En el caso en que se cumpla la hipótesis 2, imponemos una perturbación sinusoidal en la superficie libre de la forma $\eta = a \cos(kx - \omega t)$. Tomamos un referencial solidario con el fluido en el estado inicial. Como estamos suponiendo un movimiento

³En esta sección estamos suponiendo que el movimiento del fluido es plano, de modo que la componente z no participa en las ecuaciones.

irrotacional de un fluido perfecto, la velocidad proviene de un potencial escalar, al que llamaremos ϕ . La incompresibilidad del fluido implica que dicho potencial es armónico. Las condiciones de borde cinemáticas para este potencial son:

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial y}, \text{ en } y = 0, \text{ y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, \text{ en } y = -Y. \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos una condición de borde dinámica, y es que la presión en la superficie libre sea nula ($p = 0$ en $y = \eta$). La función de Bernoulli para este fluido es

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + gy = H(t).$$

Suponiendo que las ondas son de amplitud pequeña, podemos despreciar el término cuadrático en las velocidades, $\frac{|\nabla \phi|^2}{2} \approx 0$. Además, redefiniendo ϕ en cada instante si fuera necesario, podemos suponer que $H(t) = 0$. De este modo, obtenemos la ecuación de Bernoulli linealizada,

$$(1.10) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho_0} + gy = 0.$$

Evaluando esta última ecuación en un punto de la superficie libre, aunque el término $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ se evalúa en $y = 0$ (nuevamente gracias a la suposición de ondas de amplitud pequeña), obtenemos

$$(1.11) \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{y=0} = -g\eta.$$

El potencial armónico que verifica las condiciones (1.9) y (1.11) es

$$(1.12) \quad \phi(x, y, t) = \frac{a\omega}{k} \frac{\cosh(k(y+Y))}{\sinh(kY)} \sin(kx - \omega t).$$

Sea p' el cambio en el campo de presiones debido a la perturbación, $p' = p - \bar{p} = p + \rho_0 gy$. Utilizando la ecuación de Bernoulli (1.10) y la fórmula (1.12) para el potencial, obtenemos

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\rho_0 a \omega^2}{k} \frac{\cosh(k(y+Y))}{\sinh(kY)} \cos(kx - \omega t).$$

Por otra parte, la hipótesis 2 implica que el cambio de presiones p' tiene que estar dado por $p' = \rho_0 g \eta$, de donde

$$kg = \omega^2 \frac{\cosh(k(y+Y))}{\sinh(kY)}.$$

Sustituyendo las expresiones para ϕ y η en la condición de borde (1.11), se tiene la relación⁴

$$(1.13) \quad |\omega| \approx \sqrt{kg \tanh(kY)},$$

de forma que para todo y se verifica

$$1 \approx \tanh(kY) \frac{\cosh(k(y+Y))}{\sinh(kY)} = \frac{\cosh(k(y+Y))}{\cosh(kY)}.$$

Esto implica que $k(y+Y) \approx kY$ para todo $y \in [-Y, 0]$, por lo que $ky \approx 0$ en todo el dominio. En consecuencia, se verifica la hipótesis 3.

⁴Esta relación es aproximada: depende de la linealización de las ecuaciones.

Finalmente, veamos que si se cumple la hipótesis 3, entonces vale la hipótesis 1: imponiendo una perturbación de la misma forma que antes, aplicando Bernoulli y las condiciones de borde, se obtiene que la velocidad proviene de un potencial exactamente como el de la ecuación (1.12). Asimismo, como $kY \ll 1$, se cumple

$$\begin{aligned}\cosh(k(y+Y)) &\approx 1, \\ \sinh(k(y+Y)) &\approx k(y+Y), \\ \sinh(kY) &\approx kY.\end{aligned}$$

De este modo, el campo de velocidades en el estado perturbado -en el referencial que se mueve con velocidad constante u en la dirección x - verifica

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\mathbf{x}, t) &= \frac{a\omega}{kY} \cos(kx - \omega t), \\ \tilde{v}(\mathbf{x}, t) &= a\omega \left(1 + \frac{y}{Y}\right) \sin(kx - \omega t),\end{aligned}$$

por lo que se cumple la hipótesis 1. \square

De la discusión anterior, podemos obtener la velocidad a la que se desplazan las perturbaciones en la superficie libre, $c = \omega/k$. Utilizando la ecuación (1.13), y que la hipótesis de aguas someras implica $\tanh(kY) \approx kY$, se obtiene

$$(1.14) \quad c = \pm \sqrt{\frac{g \tanh(kY)}{k}} \approx \pm \sqrt{gY}.$$

En un referencial fijo con la topografía, se vería desplazar las perturbaciones con una velocidad $c = u \pm \sqrt{gY}$.

1.4. Fluidos homogéneos en un canal abierto de ancho constante

En esta sección consideraremos el flujo de un fluido incompresible homogéneo, con su superficie superior libre. Por simplicidad, asumiremos que el flujo es unidireccional (en la dirección del eje \vec{Ox}) y estacionario, y que el canal tiene ancho constante. En estos problemas planos utilizaremos la variable y para referirnos tanto a la coordenada vertical como al tirante del canal. Asimismo, denotaremos mediante $h(x)$ a la altura de la topografía en el punto de coordenada x . Aquí estaremos en las hipótesis de aguas someras descritas en la sección 1.3.

Los fenómenos que ocurren en este caso tendrán su contraparte cuando analicemos flujos de fluidos estratificados en canales abiertos; sin embargo, estos últimos pueden presentar fenómenos y regímenes distintos.

1.4.1. Ecuaciones de movimiento. Consideremos una región Ω de un canal de ancho b como en la figura 1.2 y apliquemos la condición de incompresibilidad:

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \vec{n} dA = \int_{S_2} u dA - \int_{S_1} u dA = (u(x_2)y_2 - u(x_1)y_1)b.$$

Luego, la condición de incompresibilidad implica

$$\frac{\partial}{\partial x}(uy) = 0.$$

Si consideramos el *caudal* que circula por el canal, $Q = uyb$, la condición anterior implica que esta cantidad es una constante.

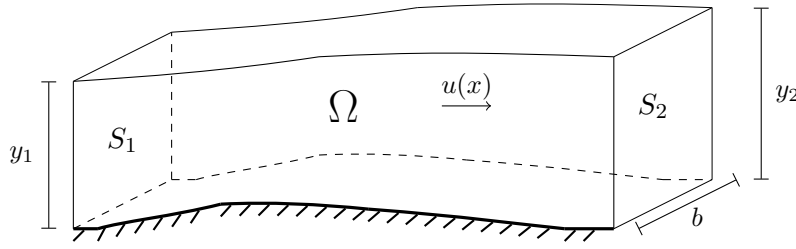


FIGURA 1.2. Canal de ancho constante, con flujo unidireccional.

Así, utilizando la ecuación (1.8), tenemos que el movimiento estacionario de un fluido perfecto homogéneo en un canal abierto de ancho constante, con topografía $h(x)$ está gobernado por las ecuaciones

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ y \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \end{cases}.$$

Podemos expresar estas igualdades en notación matricial,

$$(1.15) \quad \mathbf{C} \mathbf{v}_x = \mathbf{f}_x,$$

donde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} u & g \\ y & u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -gh \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, la función de Bernoulli toma la forma $\frac{u^2}{2} + gh + gy = H = \text{constante}$.

1.4.2. Energía específica. Llamaremos *energía específica* a la energía del fluido respecto a la topografía, expresada en unidades de longitud:

$$E = y + \frac{u^2}{2g}.$$

Para el caso de un canal de sección rectangular de ancho constante b , consideremos el caudal por unidad de ancho o caudal específico, $q = Q/b$. En varias aplicaciones prácticas, este parámetro es conocido y permanece fijo; en dicho caso, la energía específica puede ser expresada como

$$E(y) = y + \frac{q^2}{2gy^2}.$$

El gráfico de E en función de y para un caudal específico fijo tiene la forma del presentado en la figura 1.3. Observemos que para cada q fijo, E presenta un mínimo en $y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \frac{u^2}{g}$, y vale $E_c = \frac{3}{2}y_c$.

La energía específica resulta una herramienta muy práctica para el análisis de situaciones como la presentada en la figura 1.4. Allí se impone, en un canal horizontal, un escalón de pequeña altura $\delta > 0$ pero gran longitud, y se quiere conocer la velocidad y altura del fluido aguas abajo de dicha sobreelevación.

Suponiendo que no tenemos disipación de energía, y que las hipótesis realizadas sobre el escalón implican que el movimiento del fluido es aproximadamente rectilíneo, tendremos $H = \frac{u_A^2}{2} + gy_A = \frac{u_B^2}{2} + gy_B + g\delta$. Luego, la energía interna en la sección A es mayor que en la sección B , $E_A = E_B + \delta$. Como el caudal específico

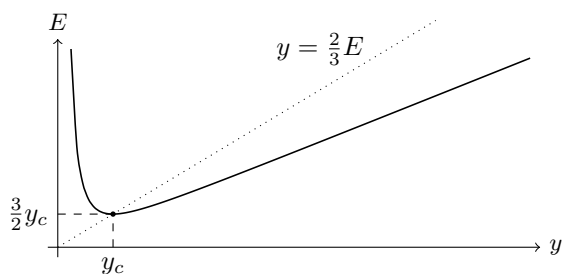


FIGURA 1.3. Curva de energía específica en función del tirante del canal, para un cierto caudal específico dado.

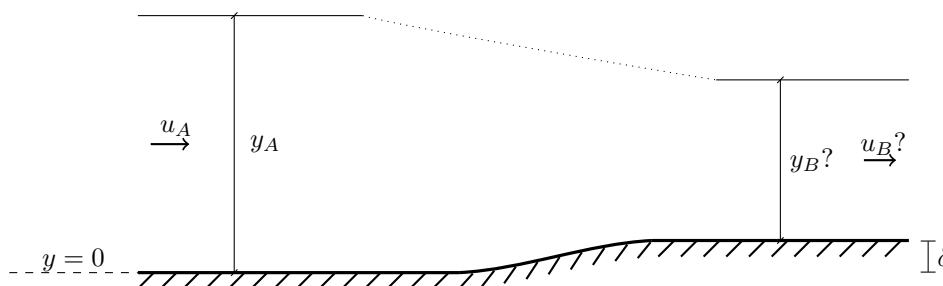


FIGURA 1.4. Canal horizontal con una pequeña sobreelevación.

permanece constante, tendremos dos posibles valores de y_B a partir del gráfico de E (ver figura 1.5).

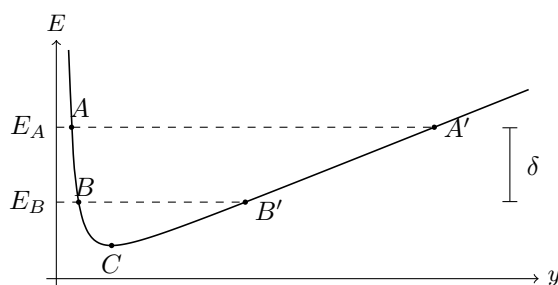


FIGURA 1.5. Curva de energía específica para el problema presentado en la figura 1.4.

La pregunta que surge de aquí es ¿cuál de los dos posibles regímenes adoptará el flujo? Supongamos que aguas arriba de la sobreelevación, el estado del flujo se encuentra representado por el punto A . Sabemos que q permanece constante, de modo que de producirse un cambio de altura, la energía interna deberá cambiar de forma tal que el flujo permanezca a lo largo de la misma curva. Así, para pasar de A a B' , necesariamente deberíamos pasar por el punto C , en el que la energía interna es mínima. Pero esto sólo podría ocurrir si el nivel de la topografía aumentara por encima del escalón y volviera a bajar. En conclusión, el estado representado por el

punto B' se vuelve inaccesible desde A si tan solo tenemos un pequeño escalón en el piso del canal. Análogamente, si aguas arriba el flujo estuviera representado por el punto A' , aguas abajo del escalón debería estar en el punto B' .

En el caso en que la altura del escalón fuera tal que $E_A - \delta < E_C$, el problema no tiene solución: el fluido permanece “estancado” aguas arriba de la sobreelevación, hasta que el nivel aumenta tanto como para mantener un nuevo estado estacionario con suficiente energía interna como para pasar el escalón.

1.5. Número de Froude y regímenes

Al analizar el problema de imponer una sobreelevación a un flujo conocido, observamos que son posibles dos alturas distintas aguas abajo y que la gráfica de energía interna en función de profundidad presenta dos ramas diferentes. Para pasar de una rama a la otra es necesario pasar por un estado en que la energía interna es mínima.

Bajo las mismas hipótesis para el flujo que las presentadas en la sección anterior, llamaremos *número de Froude* (Fr) al cociente entre la velocidad del fluido y la velocidad relativa de propagación de las perturbaciones en su superficie libre. A partir de (1.14), podemos escribir explícitamente

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}}.$$

Otra forma equivalente de definir este parámetro es a partir de la ecuación (1.15), escribiendo $Fr^2 = \det(\mathbf{C})$. Esta caracterización, aunque carece de una interpretación física como la que empleamos en la definición, resultará muy apropiada para trabajar en el caso de flujo de varias capas en un canal.

El valor de este número adimensional permitirá determinar con facilidad ciertos aspectos cualitativos del flujo. Por ejemplo, si $Fr > 1$, las perturbaciones sólo pueden viajar aguas abajo, y si $Fr < 1$, las perturbaciones pueden desplazarse tanto aguas arriba como aguas abajo. Diremos que un movimiento es *supercrítico* si $Fr > 1$, *crítico* si $Fr = 1$ y *subcrítico* si $Fr < 1$. El movimiento de un mismo fluido en un canal de topografía variable puede presentar cualquiera de estos regímenes, e incluso presentar distintos regímenes en distintas regiones de un mismo canal. Si el régimen en una parte del canal es supercrítico, y se impone un cambio brusco, éste solo podrá tener efecto aguas abajo. En cambio, si el régimen del flujo es subcrítico, la modificación puede influenciar tanto aguas arriba como aguas abajo.

Observemos que la derivada de la energía interna es $E'(y) = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 1 - Fr^2$. Luego, tenemos que la energía interna es mínima cuando el movimiento es crítico; las dos ramas en el gráfico de E corresponden al caso supercrítico y subcrítico. De la discusión para el problema del escalón presentado en la sección 1.4.2, se desprende que en dicho caso no se puede presentar un cambio de régimen: si aguas arriba del escalón el flujo es subcrítico (supercrítico), aguas abajo también lo será.

Otra propiedad importante de los flujos críticos es que, fijada una energía interna E_0 , son aquellos para los que el caudal es máximo. Para verificar esta afirmación, escribamos q en función de E_0 y de y : $q(E_0, y) = y \sqrt{2g(E_0 - y)}$. Como

$$q'(E_0, y) = \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{2E_0 - 3y}{\sqrt{E_0 - y}},$$

observamos que q presenta un único máximo cuando $y = \frac{2}{3}E_0$, y esto ocurre si y sólo si $Fr = 1$ (figura 1.3).

1.6. Controles

Hasta ahora trabajamos en casos en que q y E son conocidos inicialmente. Sin embargo, podemos preguntarnos, dado q , ¿qué factores determinan la energía interna? O recíprocamente, fijado E , ¿cómo queda determinado q ?

En un canal, el régimen del flujo quedará fuertemente determinado por ciertos mecanismos de control, que determinan -en ciertos puntos- las relaciones entre el tirante del canal, el caudal que circula y la energía interna. A estos mecanismos se los llama *controles*.

Consideremos un canal de ancho constante, cuyo nivel puede variar. Sabemos que la función de Bernoulli es constante: $H = \frac{u^2}{2} + gy + gh = gE + gh$. Derivando esta relación respecto a x , se tiene $\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0$, o equivalentemente, $\frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0$. Utilizando la expresión para $E'(y)$ obtenida anteriormente, tenemos $\frac{\partial y}{\partial x}(1 - Fr^2) + \frac{\partial h}{\partial x} = 0$. En caso de que $Fr = 1$, entonces necesariamente debe verificarse $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$.

Analicemos esta situación para el caso en que la topografía presenta una protuberancia simple, esquematizado en la figura 1.6. Supongamos que conocemos el

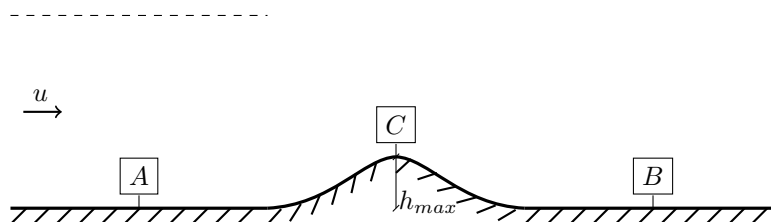


FIGURA 1.6. Canal de ancho constante con un obstáculo en la topografía.

caudal específico que circula y la topografía del canal, $h(x)$. Si el flujo fuera crítico aguas arriba del obstáculo, en una sección como A , sabemos que allí la energía interna sería la mínima necesaria como para mantener el caudal. Ahora, para poder “pasar” el obstáculo sería necesario que el fluido perdiera energía interna, lo que no puede ocurrir. De modo que el flujo en A no puede ser crítico.

Por otra parte, como el nivel del piso en B es igual al de A , si suponemos que se conserva la carga de Bernoulli en un entorno del obstáculo tendremos que la energía interna en B es igual a la de A . De modo que el flujo aguas arriba del obstáculo tampoco puede ser crítico.

De esta forma, hemos probado que la única sección en que el flujo puede ser crítico en este ejemplo es en la cresta del obstáculo, representada en la figura por el punto C . En este caso, podríamos tener regímenes distintos aguas arriba y aguas abajo del obstáculo. Asimismo, si en esta sección el flujo fuera crítico, entonces necesariamente $E_A = E_B = E_C + h_{max}$, de modo que tendríamos sólo dos posibles valores para (u_A, y_A) y (u_B, y_B) . En este sentido, la sección C *controla* al flujo en sus proximidades. El régimen que adopte el flujo en A y en B , dependería también de las condiciones aguas arriba y aguas abajo del canal.

En este caso, también es posible determinar la ubicación del control a partir del hecho de que las soluciones deben permanecer regulares. Resolviendo el sistema

(1.15) para las derivadas de u e y , obtenemos:

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u}{y(1-\text{Fr}^2)} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{1}{1-\text{Fr}^2} \frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned}$$

Luego, para que las soluciones permanezcan regulares, es necesario que si $\text{Fr} = 1$ entonces los numeradores en (1.16) se anulen. Se llega así a la misma condición necesaria que por el argumento de energía interna, $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$.

Otro mecanismo de control de interés ocurre cuando se baja abruptamente una compuerta en un canal plano en régimen subcrítico, como en la figura 1.7. Aquí,

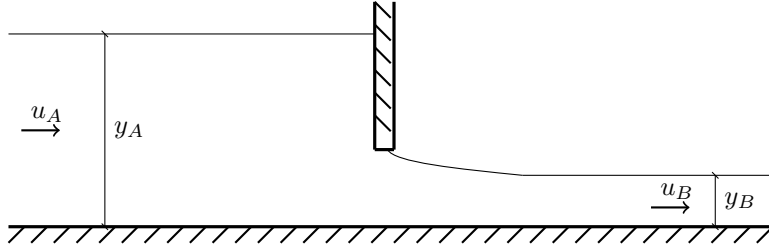


FIGURA 1.7. Compuerta en un canal.

si despreciamos las pérdidas de carga, tendremos que las energías internas aguas arriba y aguas abajo de la compuerta deben ser iguales. A partir de la gráfica de E en función de y , podemos determinar el nivel aguas abajo en función del de aguas arriba. Como en la sección A el flujo es subcrítico, podemos tomar $E_A \approx y_A$. Igualando las energías internas en A y en B , tendremos

$$(1.17) \quad y_A = y_B + \frac{q^2}{2gy_B^2},$$

de modo que $q^2 = 2gy_B^2(y_A - y_B)$. Observemos que el flujo es crítico para una altura $y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$, es decir, $y_c = (2y_B^2(y_A - y_B))^{1/3}$. Entonces,

$$\text{Fr}_B = \left(\frac{y_c}{y_B}\right)^{3/2} = \sqrt{2\left(\frac{y_A}{y_B} - 1\right)}.$$

Si la abertura es pequeña como para que $y_B < \frac{2}{3}y_A$, entonces aguas abajo de la compuerta el régimen será supercrítico. En cambio, si $y_B > \frac{2}{3}y_A$, entonces el flujo será subcrítico tanto aguas arriba como aguas abajo.

El máximo caudal que puede circular se da cuando $\text{Fr}_B = 1$, y vale

$$q_{max} = y_B \sqrt{2g(y_A - y_B)} = \sqrt{\frac{8}{27} g y_A^3}.$$

En caso de que la abertura sea pequeña, el flujo subcrítico aguas arriba de la compuerta está controlado por un mecanismo que se encuentra aguas abajo del mismo, y el flujo supercrítico aguas abajo de la compuerta está controlado aguas arriba.

Es de destacar que en los ejemplos presentados, tanto en el obstáculo como en la compuerta, sólo la presencia de un control hidráulico permitiría que se rompa la

simetría en los flujos. Esto se verá explícitamente para el caso del obstáculo en el esquema de clasificación presentado en la sección 1.8, comparando la asimetría del régimen II con los regímenes I y III.

Denton [20] presenta una breve clasificación de los controles hidráulicos para el flujo de un fluido homogéneo de acuerdo a la relación entre el tirante y el caudal:

- Si el canal presenta un obstáculo, como en la figura 1.6, y en la cima del mismo el flujo es crítico, tendremos en esta cima

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}.$$

Este tipo de controles son llamados *controles topográficos*.

- Una compuerta como la presentada en esta sección permite una discontinuidad en el tirante del canal. En dicha compuerta, conocida su abertura y su coeficiente de contracción, se tiene y_B , y aplicando (1.17) se puede determinar y_A . Tenemos aquí un *control artificial*.
- En varias aplicaciones hidráulicas, los canales presentan un vertedero en el que descargan el fluido en un reservorio. En este caso, la relación entre caudal y tirante está dada por el estado crítico en el vertedero, pero aquí el caudal es una variable dependiente, que se ajustará de modo tal que la carga hidráulica en el control sea igual a la carga en el reservorio. Dichos controles son llamados *de descarga*.
- En canales largos con pendiente, sin obstáculos, el rozamiento del fluido con el lecho puede generar un mecanismo de *control friccional*.

1.7. Resaltos hidráulicos

Consideremos un canal con piso plano, al que se le agregan dos controles producidos por dos compuertas en sus extremos, como en la figura 1.8. La compuerta

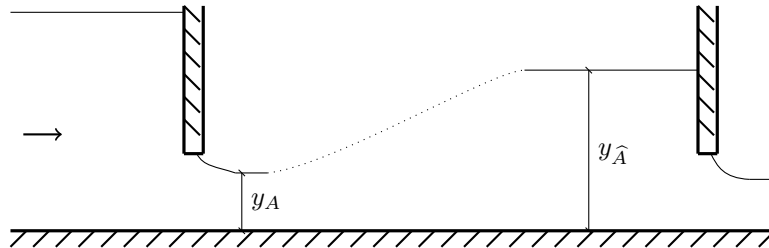


FIGURA 1.8. Canal con dos compuertas.

del inicio del canal induce un flujo supercrítico aguas abajo de la misma, y la compuerta del final requiere que aguas arriba de la misma el flujo sea subcrítico; es necesaria una transición en el canal. Esta transición no puede estar dada por la topografía, ya que estamos suponiendo que el canal es plano.

Empíricamente, ocurre un *resalto hidráulico*, un aumento brusco en el tirante del canal en el que se produce disipación de energía mecánica. Podemos pensar el resalto como una región con su propia dinámica interna, que puede ser modelada como una discontinuidad entre dos flujos uniformes. Necesitaremos que se satisfagan

las ecuaciones de conservación de masa y de momento aguas arriba y aguas abajo del resalto.

Para realizar un estudio analítico del efecto del resalto hidráulico, consideremos la *función de momento*,

$$(1.18) \quad M(y) = \frac{q^2}{gy} + \frac{y^2}{2}.$$

Aplicando balance de masa y balance mecánico entre las secciones A y \hat{A} de la figura 1.8, se tienen

$$\begin{cases} u_A y_A = u_{\hat{A}} y_{\hat{A}} = q \\ u_{\hat{A}}^2 y_{\hat{A}} - u_A^2 y_A = \frac{g}{2} (y_A^2 - y_{\hat{A}}^2) \end{cases}.$$

Sustituyendo u_A , $u_{\hat{A}}$ en la segunda ecuación, se obtiene la relación $M(y_A) = M(y_{\hat{A}})$. A partir de la gráfica de M en función de y para un caudal específico fijo, se podría determinar una altura en función de la otra (figura 1.9). Asimismo, si suponemos

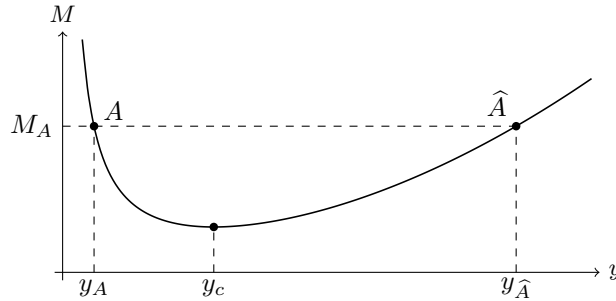


FIGURA 1.9. Curva de momento en función del tirante, para un caudal dado.

conocido el flujo en la sección A , podemos determinar las condiciones en la sección \hat{A} : como

$$\frac{q^2}{g} \left(\frac{1}{y_A} - \frac{1}{y_{\hat{A}}} \right) = \frac{1}{2} (y_A^2 - y_{\hat{A}}^2),$$

utilizando la definición de $Fr_A = \frac{q}{\sqrt{g y_A^3}}$, se tiene

$$\frac{y_{\hat{A}}^3}{y_A^3} - \frac{y_{\hat{A}}}{y_A} (2Fr_A^2 + 1) + 2Fr_A^2 = 0.$$

Esta es una ecuación de grado 3 en $\frac{y_{\hat{A}}}{y_A}$, con una raíz trivial en 1, otra raíz negativa, y una tercera en

$$(1.19) \quad \frac{y_{\hat{A}}}{y_A} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_A^2} - 1 \right).$$

Se suele llamar *conjugadas* a las alturas y_A y $y_{\hat{A}}$ vinculadas de esta forma. En adelante, denotaremos a la altura conjugada a y_A como \hat{y}_A .

Sabemos que en un resalto hidráulico se tiene una disipación de energía mecánica; podemos estimar la pérdida de carga entre las secciones A y \hat{A} :

$$H_A - H_{\hat{A}} = \left(\frac{u_A^2}{2} + g y_A \right) - \left(\frac{u_{\hat{A}}^2}{2} + g \hat{y}_A \right) = g (y_A - \hat{y}_A) + \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{y_A^2} - \frac{1}{\hat{y}_A^2} \right).$$

Utilizando el hecho de que $M(y_A) = M(\hat{y}_A)$, tenemos la relación

$$q^2 = \frac{gy_A\hat{y}_A(y_A + \hat{y}_A)}{2},$$

y empleándola en la ecuación anterior, obtenemos:

$$0 < H_A - H_{\hat{A}} = \frac{g(\hat{y}_A - y_A)^3}{4y_A\hat{y}_A}.$$

De esta forma, necesariamente se debe cumplir $\hat{y}_A > y_A$, por lo que en un resalto hidráulico sólo se puede pasar de un régimen supercrítico a uno subcrítico.

A partir de la curva de momento en función del tirante (figura 1.9), podemos deducir las siguientes propiedades de las alturas conjugadas:

- (i) para toda altura y se cumple $\hat{y} = y$;
- (ii) si denotamos por y_c a la altura crítica para un caudal dado, se cumple que $y_A < y_B < y_c$ si y sólo si $y_c < \hat{y}_B < \hat{y}_A$.

1.8. Clasificación de flujo sobre topografía

En esta sección presentaremos una clasificación de los distintos comportamientos que puede adoptar un flujo estacionario sobre un obstáculo fijo, como el esquematizado en la figura 1.10. Este problema ha sido abordado de distintas formas, obteniéndose así algunas diferencias en los resultados. Baines y Davies [10] y Huppert [29] contrastaron sus resultados analíticos con experimentos en los que el fluido está inicialmente en reposo y el obstáculo es acelerado hasta llegar a una velocidad constante. Así se obtienen resaltos, que se alejan del obstáculo. Si el canal en que se realizan los experimentos es suficientemente largo, estos resaltos se pueden alejar tanto como para considerar estacionario el flujo cerca del obstáculo.

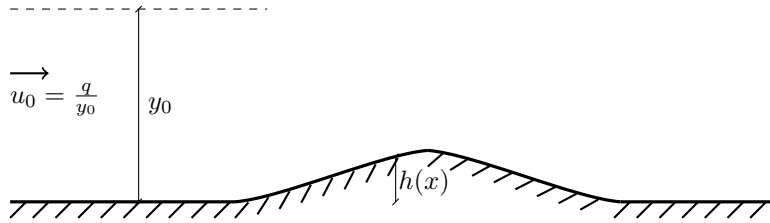


FIGURA 1.10. Flujo unidimensional sobre topografía.

Posteriormente, Lawrence [34] presentó otro esquema de clasificación, basado en experimentos en los que el obstáculo permanece fijo en el fondo de un canal y se observa el flujo por sobre el mismo. Aquí presentaremos una clasificación basada en los resultados analíticos de Lawrence. Una síntesis de los resultados que conducen al otro esquema mencionado se puede encontrar en el capítulo 2 de [8].

Consideremos una situación como la presentada en la figura 1.10, en la que circula un caudal por unidad de ancho q constante. Llamemos y_0 al nivel del fluido aguas arriba en el canal, e y_c al nivel necesario para tener un flujo crítico, $y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$.

Para determinar analíticamente el comportamiento de un flujo estacionario en un canal de ancho constante con un obstáculo, son suficientes dos parámetros adimensionados. Tanto Baines y Davies como Huppert tomaron como parámetros el

número de Froude aguas arriba en el canal, $Fr_0 = \frac{q}{\sqrt{gy_0^3}}$ y la altura adimensionalizada máxima del obstáculo, $H_{max} = \frac{h_{max}}{y_0}$. En cambio, en [34] se considera la altura máxima del obstáculo para adimensionalizar las alturas, considerándose los parámetros $y_0^* = \frac{y_0}{h_{max}}$ y la altura crítica del flujo adimensionalizada, $y_c^* = \frac{y_c}{h_{max}}$.

El camino a seguir se basa en dos hipótesis ya mencionadas: que la función de Bernoulli (1.5) se conserva en un entorno del obstáculo y que la función de momento (1.18) permanece constante cuando el canal es horizontal. La carga hidráulica, adimensionalizada dividiéndola entre gh_{max} , vale en un entorno del obstáculo:

$$H^* = \frac{H}{gh_{max}} = \frac{y}{h_{max}} + \frac{u^2}{2gh_{max}} + \frac{h}{h_{max}} = y^* + \frac{y_c^{*3}}{2y^{*2}} + h^*.$$

La función de momento, adimensionalizada dividiéndola entre h_{max}^2 , vale

$$M^* = \frac{M}{h_{max}^2} = \frac{y_c^{*3}}{y^*} + \frac{1}{2y^*}.$$

En esta clasificación solamente vamos a trabajar con variables adimensionalizadas. Para simplificar la notación, omitiremos el asterisco para referirnos a ellas. Con las nuevas variables adimensionalizadas, la ecuación (1.19) que vincula a un par de alturas conjugadas, queda:

$$(1.20) \quad \widehat{y}_A = \frac{y_A}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8y_c^3}{y_A^3}} - 1 \right).$$

Comencemos la clasificación con los dos casos más simples. Si aguas arriba del obstáculo el flujo es subcrítico y y_0 es suficientemente grande como para que en la cima del obstáculo el flujo permanezca subcrítico, entonces el flujo no puede presentar un control allí, y necesariamente aguas abajo del obstáculo deberá ser subcrítico. Análogamente, tendremos que si aguas arriba del obstáculo el flujo es supercrítico y en la cresta permanece supercrítico, entonces aguas abajo tendremos el mismo régimen. Los casos que requieren mayor atención son aquellos en que el flujo en la cima del obstáculo es crítico. Esta condición implica que los tirantes aguas arriba y aguas abajo satisfagan la ecuación

$$y + \frac{1}{2} \frac{y_c^3}{y^2} = \frac{3}{2} y_c + 1,$$

donde el lado derecho de la igualdad corresponde a evaluar la carga adimensionalizada en la cima del obstáculo.

Dividiéndola entre y , considerando $x = \frac{y_c}{y}$ y $\xi = 1 + \frac{2}{3y_c}$, esta ecuación puede ser reescrita como:

$$(1.21) \quad x^3 - 3\xi x + 2 = 0.$$

Observemos que $\xi > 1$, y llamemos $P(x)$ al polinomio del lado izquierdo de (1.21). Como se cumplen

$$\begin{aligned} P(1) &= 3 - 3\xi < 0, \\ P(0) &= 2, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) &= -\infty, \end{aligned}$$

entonces necesariamente P tiene tres raíces reales distintas, una de ellas negativa y dos de ellas positivas. De estas raíces positivas, llamaremos α a la que es menor que 1 y β a la mayor que 1. Desahaciendo el cambio de variable realizado, consideremos $y_a = y_c/\alpha$ e $y_b = y_c/\beta$. Estas dos profundidades, junto a sus profundidades conjugadas \hat{y}_a e \hat{y}_b dadas por (1.20), y a la profundidad crítica y_c , constituyen un conjunto de parámetros para clasificar el flujo.

Como y_b es un tirante correspondiente a un régimen supercrítico, y los resaltos hidráulicos son disipativos, tenemos que la energía específica correspondiente a \hat{y}_b es estrictamente menor que la correspondiente a y_b . Esta última energía específica es igual a la del fluido cuando la profundidad es y_a , de modo que se satisface la desigualdad

$$E(\hat{y}_b) < E(y_a).$$

Al ser \hat{y}_b, y_a tirantes correspondientes a profundidades subcríticas, y como $E'(y) = 1 - Fr^2$, deducimos la desigualdad $y_c < \hat{y}_b < y_a$. Utilizando las propiedades (i) e (ii) de las alturas conjugadas, podemos concluir

$$0 < \hat{y}_a < y_b < y_c < \hat{y}_b < y_a.$$

Tendremos así la siguiente clasificación, presentada gráficamente en la figura 1.11:

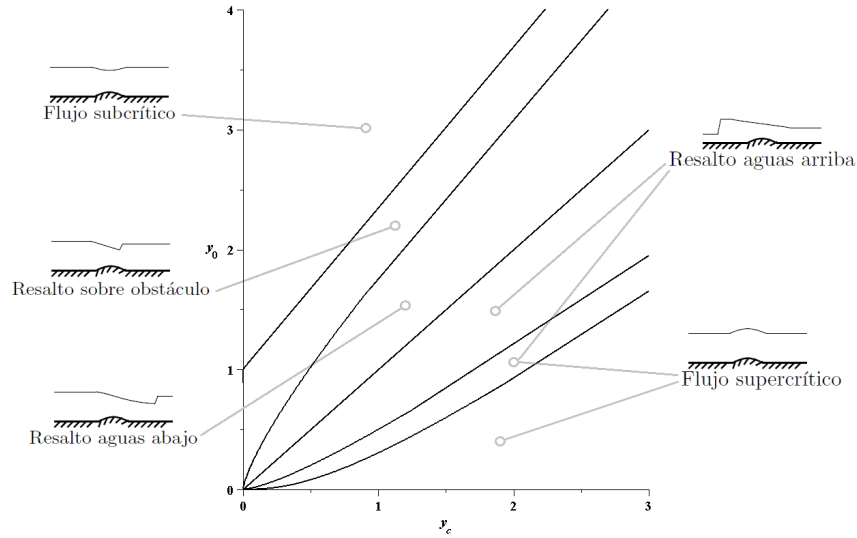


FIGURA 1.11. Esquema de clasificación para un flujo unidimensional estacionario sobre un obstáculo.

Régimen I. Flujo subcrítico: Corresponde al caso en que $y_0 > y_a$. Se verifica $Fr < 1$ en todo el canal, y veremos un pequeño descenso del nivel del fluido sobre el obstáculo.

Régimen II. Flujo controlado en la cima: Este régimen se tiene cuando $y_a > y_0 > \hat{y}_a$. Se presenta un control en la cresta del obstáculo, y un resalto hidráulico. Se tienen tres sub-regímenes, determinados por la ubicación de dicho resalto.

Sub-régimen IIa. Resalto sobre el obstáculo: Aquí $y_a > y_0 > \hat{y}_b$.

La energía interna inicial no es suficiente para mantener un estado estacionario sobre el obstáculo; el nivel aguas arriba debe aumentar hasta llegar a y_a . Este proceso se llama *estrangulamiento*, y una vez que el nivel de la superficie es tal como para mantener un régimen crítico en la cresta, puede cambiar de régimen a supercrítico aguas abajo del obstáculo. Un siguiente control aguas abajo ($y_0 > y_c$) implica que el flujo debe cambiar de régimen a subcrítico, por lo que se tiene un resalto hidráulico. En este caso, el resalto se encuentra sobre el propio obstáculo.

Sub-régimen IIb. Resalto aguas abajo del obstáculo: En este caso, $\hat{y}_b > y_0 > y_c$. Se vuelve a tener estrangulamiento del fluido por el obstáculo. El flujo aguas abajo de la cima del obstáculo tiene suficiente momento como para mantener el régimen supercrítico, por lo que el resalto no se presenta sobre el obstáculo sino aguas abajo.

Sub-régimen IIc. Resalto aguas arriba: Corresponde al caso $y_c > y_0 > \hat{y}_a$. El flujo que ingresa al canal es supercrítico, pero carece de la energía interna suficiente como para “pasar” al obstáculo. En régimen supercrítico, la forma de obtener mayor energía interna manteniendo el caudal es reduciendo el tirante, lo que no puede ocurrir. Por ende, debe ocurrir un cambio de régimen aguas arriba del obstáculo, y en régimen subcrítico producirse un estrangulamiento del fluido, ganándose la energía interna al aumentar el tirante.

Régimen III. Flujo supercrítico: Aquí $y_0 < y_b$, y vale $Fr < 1$ en todo el canal. El único efecto del obstáculo es aumentar el nivel de la superficie libre.

La clasificación anterior no parece completamente satisfactoria, pues si $\hat{y}_a < y_0 < y_b$ se podría estar frente a un flujo en régimen IIc o III. Lo que ocurre en esta región depende de las condiciones iniciales, y de qué forma se obtuvo el flujo en cuestión; el sistema presenta histéresis [10, 34].

1.9. Canales de sección transversal variable

Consideremos el flujo estacionario de un fluido perfecto homogéneo en un canal de sección transversal rectangular, con su fondo en un nivel $h(x)$ y de ancho $b(x)$ (figura 1.12). Supongamos que es conocido el caudal que circula por el canal, $Q = buy$. Aplicando la aproximación de aguas someras (1.8) y la conservación de masa $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, obtenemos que el sistema responde a la ecuación

$$(1.22) \quad \mathbf{C} \mathbf{v}_x = \mathbf{D} \mathbf{f}_x,$$

con

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} u & g \\ y & u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -g & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} h \\ 1/b \end{pmatrix}.$$

La matriz \mathbf{C} coincide con la de (1.15), y por lo tanto la definición de número de Froude permanece incambiada respecto a la del caudal de ancho constante.

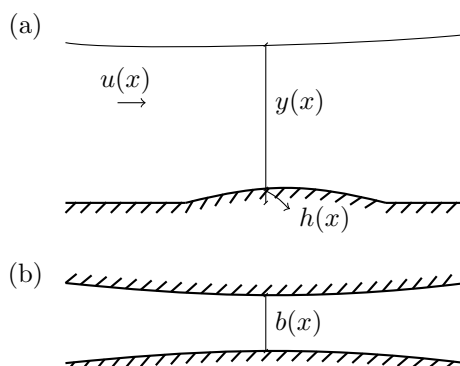


FIGURA 1.12. Flujo de una capa uniforme en un canal con sección transversal variable: (a) vista lateral; (b) vista horizontal.

Sin embargo, la ubicación de los controles no es un asunto trivial. Resolviendo (1.22), se tiene

$$(1.23) \quad \begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} &= - \left[\frac{1}{1-Fr^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} + \left[\frac{1}{1-Fr^2} \right] \frac{1}{y} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x} &= \left[\frac{Fr^2}{1-Fr^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} - \left[\frac{1}{1-Fr^2} \right] \frac{1}{y} \frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned}$$

Si el flujo es crítico en una sección, para que las soluciones permanezcan regulares es necesario que los numeradores en (1.23) se anulen. Llegamos así a una condición necesaria para la presencia de un control hidráulico:

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Si la geometría del canal es tal que $\frac{\partial b}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ coinciden en alguna sección, entonces allí se puede establecer flujo crítico. Pero si esto no ocurre, la ubicación del control no solo dependerá de la geometría del canal sino también del caudal que circula Q . Dicha variable, junto a la geometría, determinan el tirante $y(x)$.

1.10. Fluidos estratificados

Llamamos *estratificados* a aquellos fluidos cuya densidad varía espacialmente, y en los que esta variación de densidad tiene importancia en la dinámica de sus flujos. Por lo general, la variación de densidad es estable cuando los gradientes de esta magnitud son aproximadamente verticales, con el fluido más pesado abajo y el más liviano más arriba.

Podemos distinguir dos clases de fluidos estratificados, considerando de qué forma varía la densidad: aquellos que presentan una *estratificación continua*, y aquellos que presentan discontinuidades en su densidad. Como caso particular de estos últimos encontramos los fluidos constituidos por una cantidad finita de capas, en los que cada una de estas capas presenta densidad constante. Diremos que estos fluidos están *discretamente estratificados*.

Por ser los fluidos más comunes en la atmósfera y los océanos, comenzaremos analizando aquellos continuamente estratificados.

1.10.1. Aproximación de Boussinesq. Tomemos nuevamente como punto de partida las ecuaciones de Euler para un fluido incompresible, con un campo de densidades no necesariamente homogéneo:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}.$$

Elijamos un estado de referencia para el fluido de equilibrio hidrostático, en el que su campo de densidades ρ_0 y de presiones p_0 satisfacen $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$. Consideremos la diferencia de densidades y presiones respecto a este estado de referencia,

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho - \rho_0, \\ p' &= p - p_0. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas magnitudes en la ecuación de Euler, utilizando la relación entre ρ_0 y p_0 , y dividiendo entre ρ_0 , obtenemos

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\right) = \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p'.$$

El término ρ'/ρ_0 aparece dos veces en la ecuación anterior. Si este cociente es pequeño, cuando las variaciones de densidad son muy pequeñas respecto a la densidad de referencia, podemos descartarlo en el lado izquierdo de dicha ecuación. Sin embargo, en el término de flotabilidad del lado derecho de la igualdad, el término ρ'/ρ_0 es el único que multiplica a la aceleración gravitatoria, por lo que no lo despreciaremos. Esta es la llamada *aproximación de Boussinesq*. Esta aproximación resulta adecuada para movimientos en que la escala vertical del flujo no sea grande. Para las aplicaciones a flujos atmosféricos, se suele emplear exitosamente si la escala de movimiento vertical es menor a 1 km, incluso en casos en que existe gran variación de densidades ([49], sección 1.3).

Si tenemos un fluido en el que las velocidades y desplazamientos son pequeños, se justifica despreciar los términos convectivos (no lineales) de la ecuación de Euler, por ser de magnitud mucho menor que los restantes. Combinando esta linealización con la aproximación de Boussinesq, se tiene

$$(1.24) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p'.$$

Linealizando la ecuación de incompresibilidad (1.2), y aplicando la aproximación de Boussinesq, se obtiene

$$(1.25) \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0,$$

donde w es la componente vertical de la velocidad. Es importante recalcar que el segundo sumando de la igualdad anterior no puede ser despreciado, ya que la elección de ρ_0 no implica que no pueda tener grandes variaciones en la dirección vertical. Las ecuaciones (1.24) y (1.25) constituyen las ecuaciones de Boussinesq linealizadas para un fluido incompresible.

Para esta aproximación, consideremos el movimiento de una partícula de fluido que se desplaza una distancia η en dirección vertical respecto a su posición de equilibrio hidrostático. Como $\frac{\partial \eta}{\partial t} = w$, utilicemos la ecuación (1.25) junto a la condición inicial $\eta(t=0) = 0$, $\rho'(t=0) = 0$, para obtener

$$\eta = \frac{-\rho'}{\partial \rho_0 / \partial z}.$$

Combinando esta igualdad con (1.24) y despreciando la variación en la presión, tenemos que el desplazamiento η satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \left(\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \eta.$$

Como $\partial \rho_0 / \partial z < 0$, la partícula tendrá un movimiento oscilatorio con frecuencia angular

$$N = \left(-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^{1/2},$$

a la que llamaremos *frecuencia de flotabilidad*⁵. Conocer esta frecuencia para un flujo nos permite tener una idea aproximada de la escala de tiempo en la que ocurren los movimientos oscilatorios por flotabilidad. Tanto en la atmósfera como en la termoclina oceánica⁶ los períodos de estas oscilaciones son del orden de algunos minutos, y en los océanos profundos pueden ser de varias horas [49].

1.10.2. Estratificaciones continuas vs. discretas. Si bien la mayoría de los flujos en la atmósfera y en los océanos presentan estratificaciones continuas, este tipo de estratificaciones presentan algunas dificultades para su estudio analítico. Tomemos como ejemplo el problema de estudiar el flujo de un fluido en un canal abierto con un obstáculo. Long [37, 39] presentó soluciones analíticas exactas para un caso particular de estratificaciones, aunque la representación general de este tipo de flujos presenta varios fenómenos no lineales (en el capítulo 5 de [8] se presenta una síntesis de estos fenómenos y una comparación entre la teoría, resultados numéricos y experimentales).

Una de las primeras dificultades que surgen al considerar flujos unidireccionales de fluidos estratificados sobre obstáculos está en la carencia de un parámetro (número de Froude) que determine su comportamiento cualitativo. Otra de las dificultades está en dar condiciones suficientes para la existencia de controles hidráulicos. Killworth [30] empleó la propia densidad como coordenada vertical y definió el número de Froude como una función que varía verticalmente. En base a este número de Froude, presentó condiciones necesarias para la existencia de controles.

De este tipo de dificultades surge el interés por el estudio de flujos con estratificaciones discretas. Aunque en muchos aspectos estos flujos son más simples que los continuamente estratificados, también pueden presentar algunas diferencias cualitativas. Por ejemplo, las inestabilidades en los fluidos en capas se presentarán como fenómenos en las interfases, y las velocidades con las que viajan las perturbaciones presentan cierta analogía con la velocidad para el caso de una única capa con superficie libre, dada por (1.14).

A pesar de las ventajas que pueda presentar aproximar un flujo estratificado continuamente por uno en capas, esta simplificación no tiene por qué ser válida siempre, ni tampoco es claro de qué forma realizar esta aproximación en un contexto general. Dado un campo de densidades continuo $\rho(z)$, si lo queremos aproximar por uno constante a trozos $\tilde{\rho}(z)$, ¿cuántas capas serían necesarias tomar para que el error sea “pequeño”? ¿De qué espesor? ¿Será verdad que cuantas más capas tomemos mejor será la aproximación?

⁵También es común denominar este número como frecuencia de Brunt-Väisälä.

⁶Esta es una capa donde la temperatura cambia muy rápidamente con la profundidad.

Varios investigadores realizaron medidas de campo de flujos estratificados y presentaron modelos discretos para estos flujos. Farmer y Denton [23] recolectaron datos en Observatory Inlet, un fiordo en Columbia Británica, Canadá, y aproximaron el flujo observado por un modelo de tres capas. La elección de la cantidad de capas se basó en que a las velocidades observadas, sólo fueron relevantes dos modos internos; la densidad y espesor de cada capa fueron elegidas no sólo en base al perfil de densidades observado experimentalmente, sino también para mantener las velocidades de estas ondas internas.

Smeed [45] estudió los flujos de intercambio entre el Mar Rojo y el Golfo de Aden, en el estrecho de Bab al Mandab. Allí, el agua salada del mar es más densa que el agua del golfo, y se tiene una tercera capa constituida por el agua superficial. El cambio de dirección observado entre el verano y el invierno en el flujo de esta agua superficial es verificado por el modelo de tres capas que se presenta en dicho trabajo.

Por otra parte, Armi y Farmer [4] modelaron sus observaciones del flujo en Knight Inlet (otro fiordo de la costa de Columbia Británica, Canadá) mediante un flujo de intercambio de dos capas, en el que los estratos fluyen en sentidos opuestos. En dicho trabajo los autores dan un paso más en la simplificación de los fenómenos observados, al considerar que una única capa es dinámicamente activa. Este tipo de simplificaciones, presentadas en [2, 3, 22], se realizan cuando una de las capas presenta un número de Froude muy pequeño, esto es, cuando dicha capa puede ser considerada en reposo.

Estabilidad lineal

Una de las preguntas naturales que surge al considerar un cierto campo solución de las ecuaciones que gobiernan un fenómeno físico dado, es si es físicamente *observable*. Como punto de partida consideremos un conjunto de estas ecuaciones, en las que participan ciertas magnitudes (velocidad, presión, densidad, temperatura) que queremos estudiar, y llamemos $X_0(\mathbf{x}, t)$ a un campo solución que estaremos analizando. Nos referiremos a dicho campo como *estado inicial*. Físicamente, resulta imposible determinar si el fenómeno observado corresponde exactamente al dado por el campo X_0 . Incondicionalmente tendremos que asumir que existe un cierto ‘ruido’ impuesto por el ambiente, por irregularidades de las condiciones de borde, por el equipo con el que se mide o por cualesquiera otros medios. Si toda perturbación pequeña termina por desvanecerse, finalmente volveremos a observar el estado inicial; en tal caso diremos que dicho estado es *estable*.

Matemáticamente, formularemos la estabilidad de un estado inicial $X_0(\mathbf{x}, t)$ mediante la noción de estabilidad en el sentido de Lyapunov: diremos que X_0 es estable si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $X(x, t)$ es otro campo solución, que satisface $\|X(\cdot, 0) - X_0(\cdot, 0)\| < \delta$, entonces $\|X(\cdot, t) - X_0(\cdot, t)\| < \varepsilon$ para todo $t > 0$. Por simplicidad, aquí consideraremos la norma infinito en el dominio físico Ω^1 , en la que

$$\|X(\cdot, t)\| = \text{máx}\{|X(\mathbf{x}, t)| / \mathbf{x} \in \Omega\}.$$

Por otra parte, diremos que X_0 es *asintóticamente estable* si es estable y existe un $\delta > 0$ tal que si X es otra solución y satisface $\|X(\cdot, 0) - X_0(\cdot, 0)\| < \delta$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(\cdot, t) - X_0(\cdot, t)\| = 0.$$

Si el δ de esta última definición puede ser elegido arbitrariamente, entonces el campo X_0 se dice *asintóticamente globalmente estable*.

Una solución que no sea estable en el sentido de Lyapunov no es observable, ya que existen perturbaciones que terminan por alejarnos de dicha solución. Asimismo, un campo solución X_0 puede ser estable frente a pequeñas perturbaciones pero inestable ante perturbaciones mayores. Diremos que X_0 es *no-linealmente inestable* en tal caso. La idea detrás de la estabilidad lineal es precisamente restringirse a perturbaciones infinitesimales. Analíticamente, esto se logra linealizando las ecuaciones que gobiernan al fenómeno alrededor del estado inicial, obteniendo así un nuevo sistema de ecuaciones.

Por otra parte, a menos que nos encontremos frente a una bifurcación, es decir, un estado que se encuentre en la frontera entre dos comportamientos cualitativos

¹En principio, tenemos libertad para elegir la norma que sea más conveniente. Según el caso, podría ser apropiado trabajar con las normas de $L^2(\Omega)$ o de $H^1(\Omega)$.

distintos, tendremos analíticamente validada la linealización alrededor del estado inicial mediante el teorema de Hartman-Grobman.

Desde el punto de vista físico, la estabilidad lineal debe ser considerada como un indicador del comportamiento inicial del sistema frente a perturbaciones. Un análisis lineal de la estabilidad es válido hasta que los efectos no-lineales pasen a ser importantes. De todos modos, los resultados empíricos indican que la estabilidad lineal de un flujo es un buen indicador de la estabilidad del mismo [41].

En la primera sección de este capítulo se presenta la herramienta utilizada para el análisis de estabilidad lineal, el método de los modos normales, y se determina una condición necesaria para que un estado inicial sea linealmente estable. Luego, se presenta el teorema de Squire, que permite simplificar el análisis de estabilidad lineal al considerar solamente perturbaciones bidimensionales. La estabilidad de flujos de fluidos perfectos incompresibles con campos de densidades y velocidades suaves está determinada por la ecuación de Taylor-Goldstein, que se presenta en la sección 2.3. En cambio, el desarrollo para dos capas homogéneas de densidades distintas, con una discontinuidad de velocidades entre las mismas, se presenta en la sección 2.4. Posteriormente se realiza una comparación entre los resultados del análisis de estabilidad para flujos continuamente estratificados y una aproximación por dos capas homogéneas. El capítulo concluye con el estudio de inestabilidades de Kelvin-Helmholtz en problemas de aguas someras.

2.1. Método de los modos normales

En esta sección presentaremos un criterio para determinar la estabilidad lineal de un cierto fenómeno. Consideremos un estado inicial $X_0(\mathbf{x}, t)$, que es solución de una cierta ecuación diferencial que gobierna el problema en cuestión, y al que se le impone una perturbación $\psi(\mathbf{x}, t)$. el nuevo estado perturbado $X_0 + \psi$ debe satisfacer la misma ecuación diferencial que el estado inicial, y a partir de ésta podemos obtener una nueva ecuación para la perturbación. Luego de linealizada esta ecuación, eliminando los términos de segundo orden en ψ , se tiene un problema lineal

$$(2.1) \quad D(\nabla, X_0, \mathcal{R})(\psi) = 0,$$

donde \mathcal{R} denota un conjunto de parámetros propios del sistema.

Por lo general, este operador D mantendrá las simetrías propias de las ecuaciones originales y del estado inicial ([28], sección 3.1): por ejemplo, si X_0 es estacionario, entonces D será homogéneo en t . Mediante la aplicación de la transformada de Fourier, convertiremos nuestro problema de estabilidad en una ecuación diferencial ordinaria o en una ecuación algebraica.

Si el estado básico es perturbado aplicando un forzante $S(\mathbf{x}, t)$, entonces la perturbación ψ deberá satisfacer la ecuación

$$(2.2) \quad D\psi = S.$$

Por otra parte, si comenzamos a aplicar el forzante en el instante $t = 0$, entonces es natural esperar que la perturbación ψ satisfaga el *principio de causalidad*:

$$(2.3) \quad \psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{si } t < 0.$$

Sean $\delta(\mathbf{x})$ y $\delta(t)$ las distribuciones delta de Dirac en el espacio y el tiempo respectivamente, si tomamos el caso particular en que $S(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t)$, estaremos considerando una perturbación puntual en $\mathbf{x} = 0$ en el instante $t = 0$ y dejando

que el sistema evolucione libremente. La solución a este problema será la función de Green $G(\mathbf{x}, t)$ asociada al operador lineal D ; dado otro forzante cualquiera S' , la evolución de la perturbación estará dada por la convolución de G con S' .

Teniendo esto en cuenta, podemos distinguir dos comportamientos de la respuesta $\psi(\mathbf{x}, t)$ del sistema a la perturbación inicial:

- Puede tener amplitud que decae en el tiempo en todo el dominio. En este caso, la función de Green satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en las rectas } \frac{\mathbf{x}}{t} = cte,$$

y diremos que el estado inicial es linealmente estable.

- Puede que la amplitud máxima no decaiga en el tiempo. En dicho caso, se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(\mathbf{x}, t) \neq 0 \quad \text{en alguna recta } \frac{\mathbf{x}}{t} = cte,$$

y diremos que el estado inicial es linealmente inestable.

Comenzaremos presentando, mediante un enfoque heurístico, el método de los modos normales. Supongamos que el operador D es homogéneo en el espacio y en el tiempo² y busquemos soluciones particulares de (2.1) de la forma

$$(2.4) \quad \psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)},$$

donde $\mathbf{k} = (k, \ell, m)$ se llama vector de onda y ω frecuencia angular. Si sustituimos este candidato a solución en la ecuación (2.1), estaremos obteniendo una ecuación de dispersión. Esta se puede obtener reemplazando en el operador D ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\mapsto -i\omega, \\ \frac{\partial}{\partial x} &\mapsto ik, \\ \frac{\partial}{\partial y} &\mapsto i\ell, \\ \frac{\partial}{\partial z} &\mapsto im, \end{aligned}$$

y resulta de la forma $D(\mathbf{k}, \omega, \mathcal{R}) = 0$. Aquí es de notar la gran ventaja que tiene linealizar las ecuaciones: dada una perturbación arbitraria en L^2 , podríamos considerar su descomposición de Fourier, lo que llevaría a una serie donde los sumandos serían coeficientes por términos como en (2.4). Como la ecuación fue linealizada, los distintos modos (sumandos de la serie) no pueden interactuar entre sí. Luego, alcanza con estudiar el comportamiento de cada modo por separado.

Fijado un vector de onda $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, las frecuencias angulares $\omega_j(\mathbf{k}, \mathcal{R}) = \omega_{j,r}(\mathbf{k}, \mathcal{R}) + i\omega_{j,i}(\mathbf{k}, \mathcal{R})$ que anulan la relación de dispersión se llaman *modos temporales*; aquí j es un índice que podría tomar valores enteros. A partir de (2.4), esta perturbación se desplazará con una velocidad de fase $c_j = \omega_{j,r}(\mathbf{k}, \mathcal{R})/|\mathbf{k}|$ y su amplitud variará de acuerdo a $\omega_{j,i}(\mathbf{k}, \mathcal{R})$. Si existen un vector de onda particular \mathbf{k}_0 y un índice j tales que $\omega_{j,i}(\mathbf{k}, \mathcal{R}) > 0$, entonces el estado inicial debería ser linealmente inestable, ya que por lo menos una perturbación crecerá en el tiempo. Recíprocamente, si para todos los vectores de onda, todos los modos temporales

²Esto sería consecuencia de suponer que el estado inicial es un campo constante.

tienen parte imaginaria negativa, entonces el estado básico debería ser linealmente estable.

En el espacio generado por los vectores de onda \mathbf{k} y los parámetros \mathcal{R} , llamaremos *superficie neutral* al conjunto de puntos en los que $\max \omega_{j,i}(\mathbf{k}, \mathcal{R}) = 0$. Dado un estado inicial, es decir, fijados los parámetros \mathcal{R} , diremos que es *neutralmente estable* si verifica esta condición. Además, si este estado se encuentra en la frontera (en el espacio $\mathbf{k} - \mathcal{R}$) entre estados linealmente estables e inestables, diremos que es *marginalmente estable*.

Presentemos, ahora sí en un marco general, estas condiciones para la estabilidad o inestabilidad lineal de un estado inicial. Retomemos la ecuación (2.2) de evolución de una perturbación con un forzante dado, de la forma $S(\mathbf{x}, t) = \delta(x)\delta(t)$. Asumamos, para simplificar la notación, que nuestra perturbación ψ depende de una única variable espacial x . Suponiendo que tanto $\psi(x, t)$ como su transformada de Fourier $\hat{\psi}(k, \omega)$ estén en L^1 , se tiene la representación de ψ ([24], sección 8.3 y notas al final del capítulo 8):

$$(2.5) \quad \psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{L_\omega} \int_{F_k} \hat{\psi}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega,$$

donde las integrales se realizan en caminos F_k, L_ω en el plano complejo, y que deben ser elegidos con ciertos recaudos. En primer lugar, es necesario que esta integral sea convergente para todo (x, t) ; además, se debe satisfacer la condición de causalidad (2.3). Supongamos además que $\psi(x, t)$ decae suficientemente rápido en el espacio, de forma tal que su transformada de Fourier espacial

$$\hat{\psi}(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) e^{-ikx} dx$$

esté bien definida si $|\text{Im}(k)| < \varepsilon$. De esta forma, podremos elegir como camino F_k al propio eje real. Por otra parte, supongamos que las perturbaciones no pueden crecer en el tiempo más rápidamente que cierta exponencial

$$(2.6) \quad |\psi(x, t)| \leq C_0(\psi) e^{\gamma t},$$

donde γ es un número real fijo. En dicho caso, si $\text{Im}(\omega) > \gamma$, tendremos que para todo x la integral

$$\hat{\psi}(x, \omega) = \int_0^{+\infty} \psi(x, t) e^{-i\omega t} dt$$

es convergente (observar que si $t < 0$ tenemos que $\psi(x, t) = 0$). Naturalmente, esta cota γ es también cota superior para todas las $\omega_{j,i}(k, \mathcal{R})$. Si elegimos la curva L_ω como una recta horizontal $\text{Im}(\omega) = cte \geq \gamma$, tendremos asegurado que L_ω no interseca a ninguna de las curvas $\omega_j(k, \mathcal{R})$, con $k \in \mathbb{R}$.

Resolvamos la ecuación (2.2). Aplicando la transformada de Fourier respecto a (x, t) de ambos lados de dicha igualdad, obtenemos

$$(2.7) \quad D(k, \omega) \hat{\psi}(k, \omega) = \hat{S}(k, \omega).$$

Luego, la solución a la ecuación es, a partir de (2.5),

$$(2.8) \quad \psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{L_\omega} \int_{F_k} \frac{\hat{S}(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega.$$

A pesar de ser solución del problema, esta expresión no resulta del todo satisfactoria, ya que no nos permite interpretar en forma directa la estabilidad de un estado frente a un forzante.

Observemos que las singularidades del integrando en la expresión (2.8) sólo podrían ser las raíces de la relación de dispersión $D(k, \omega) = 0$. Por como elegimos F_k , estas raíces se encuentran en las curvas $\omega_j(k, \mathcal{R})$, pero la elección de L_ω nos asegura que no tendremos singularidades en el integrando.

Si a partir de (2.7) sólo aplicamos la transformada de Fourier inversa respecto a t , obtenemos

$$\hat{\psi}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\omega} \frac{\hat{S}(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Calculemos esta integral para $t < 0$: dado $R > 0$, consideremos Γ_R como la unión del segmento contenido en L_ω y extremos con partes reales $-R$ y R , con el semicírculo que determinan estos dos puntos contenido en el semiplano superior, al que llamaremos γ_R (figura 2.1). Como Γ_R no encierra ningún polo, se tiene

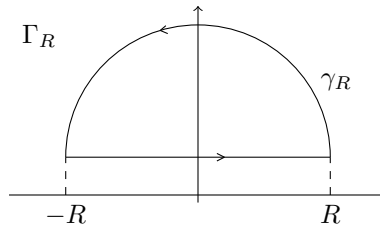


FIGURA 2.1. Camino para hallar $\psi(x, t)$, con $t < 0$.

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\hat{S}(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega = 0.$$

Además,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{\hat{S}(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} |e^{-t\text{Im}(\omega)}| d\omega = 0,$$

de modo que $\hat{\psi}(k, t) = 0$ para todo $t < 0$.

Para $t \geq 0$, tomemos ahora Γ_R como la unión del mismo segmento pero con el semicírculo contenido en el semiplano inferior (figura 2.2). En este caso, será nece-

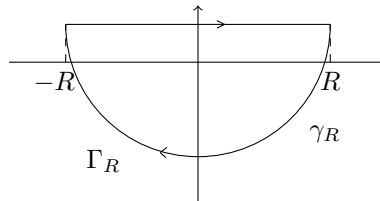


FIGURA 2.2. Camino para calcular $\psi(x, t)$, con $t \geq 0$.

sario asumir que D es analítica y que todos los polos de \widehat{S}/D son simples. Entonces, aplicando el teorema de los residuos,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\widehat{S}(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega = -2\pi i \sum_j \frac{\widehat{S}(k, \omega_j(k))}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j(k))} e^{-i\omega_j(k)t}.$$

Nuevamente, el rápido decaimiento del integrando nos permite asegurar que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\widehat{S}(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega = 0,$$

de donde

$$\widehat{\psi}(k, t) = -i \sum_j \frac{\widehat{S}(k, \omega_j(k))}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j(k))} e^{-i\omega_j(k)t} \quad \text{para } t \geq 0.$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa respecto a x , tenemos una nueva expresión para la perturbación:

$$(2.9) \quad \psi(x, t) = \frac{-i}{2\pi} \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{S}(k, \omega_j(k))}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j(k))} e^{i(kx - \omega_j(k)t)} dk.$$

A partir de esta expresión, tenemos que si buscamos acotar $|\psi|$ como en (2.6), la menor cota γ está dada por

$$\gamma = \omega_{i, \max} = \max_{k \in \mathbb{R}} \omega_{j, i}(k).$$

De esta forma, tenemos probado el siguiente resultado sobre estabilidad lineal:

- Si $\omega_{i, \max} < 0$, el estado inicial es linealmente estable. De hecho, según (2.9), todas las perturbaciones infinitesimales decaen exponencialmente; el estado inicial es asintóticamente estable.
- Si $\omega_{i, \max} > 0$, el estado inicial es inestable, ya que para algún número de onda k , una curva $\omega_j(k)$ intersecta el semiplano $\text{Im}(\omega) > 0$ y por lo tanto (2.9) es divergente.
- Si $\omega_{i, \max} = 0$, el estado inicial es neutralmente estable. En este caso, no podemos determinar la estabilidad del sistema mediante un análisis lineal.

2.2. Teorema de Squire

Una simplificación importante en el estudio de la estabilidad lineal de un problema tridimensional por modos normales es poder asumir que las perturbaciones sólo son bidimensionales. Squire [47], trabajando con fluidos viscosos, demostró que para cada perturbación tridimensional existe una perturbación bidimensional más inestable.

En esta sección presentaremos la transformación de Squire para fluidos perfectos, que validará imponer perturbaciones bidimensionales sobre un estado inicial para estudiar la estabilidad lineal del mismo. Si bien se presentará la transformación en un caso concreto, que será analizado en la sección 2.3, es directo aplicar dicha transformación en cualquier otro de los problemas planteados en este capítulo.

Consideremos un fluido incompresible de densidad variable, en un estado inicial en el que se desliza unidireccionalmente según $\mathbf{u}(y) = u(y)\hat{e}_1$, y tiene un campo de densidades $\rho_0(y)$ y uno de presiones $p_0(y)$ (figura 2.3).

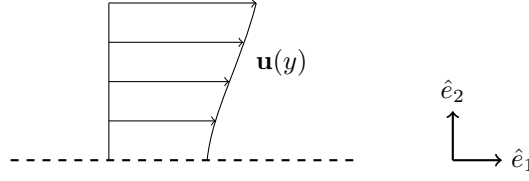


FIGURA 2.3. Estado inicial para un fluido con velocidad y densidad variables.

Supongamos que en este estado inicial vale la aproximación de Boussinesq presentada en la sección 1.10.1. La componente según \hat{e}_2 de esta ecuación es simplemente

$$0 = -\frac{\partial p_0}{\partial y} - \rho_0(y)g.$$

Apliquemos una perturbación tridimensional sobre este estado inicial: consideremos los campos perturbados

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} &= (u + \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}), \\ \tilde{\rho} &= \rho_0 + \rho, \\ \tilde{p} &= p_0 + p.\end{aligned}$$

La ecuación de continuidad $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0$ se traduce en una ecuación de continuidad para las perturbaciones:

$$(2.10) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0.$$

Tomando como densidad de referencia ρ_0 , tenemos que el estado perturbado también debe satisfacer la ecuación de Boussinesq

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p.$$

Luego de linealizada esta ecuación, tenemos sus tres componentes:

$$(2.11) \quad \begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= -\frac{\rho}{\rho_0} g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}$$

Como los coeficientes en las ecuaciones (2.10) y (2.11) no dependen de x, z, t , podemos considerar modos normales de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, z, t) &= \hat{u}(y)e^{i(kx+mz-\omega t)}, \\ \tilde{v}(x, y, z, t) &= \hat{v}(y)e^{i(kx+mz-\omega t)}, \\ \tilde{w}(x, y, z, t) &= \hat{w}(y)e^{i(kx+mz-\omega t)}, \\ \rho(x, y, z, t) &= \hat{\rho}(y)e^{i(kx+mz-\omega t)}, \\ p(x, y, z, t) &= \hat{p}(y)e^{i(kx+mz-\omega t)}.\end{aligned}$$

Podemos suponer $k, m > 0$ sin perder generalidad, ya que el signo de $\text{Re}(\omega)$ alcanzaría para determinar el sentido de desplazamiento de la perturbación. Una

vez sustituidos los modos en las ecuaciones, obtenemos

$$(2.12) \quad \begin{aligned} (u - \omega/k)ik\hat{u} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{v} &= -\frac{ik}{\rho_0}\hat{p}, \\ (u - \omega/k)ik\hat{v} &= -\frac{\hat{p}}{\rho_0}g - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \hat{p}}{\partial y}, \\ (u - \omega/k)ik\hat{w} &= \frac{-im}{\rho_0}\hat{p}, \\ ik\hat{u} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + im\hat{w} &= 0. \end{aligned}$$

Definamos $c = \omega/k$, y consideremos la transformación de Squire

$$\begin{aligned} \bar{k} &= (k^2 + m^2)^{1/2}, \\ \bar{u} &= \frac{k}{\bar{k}}\hat{u} + \frac{m}{\bar{k}}\hat{w}, \\ \bar{v} &= \hat{v}, \\ \bar{\rho} &= \frac{\bar{k}}{k}\hat{p}, \\ \bar{p} &= \frac{\bar{k}}{k}\hat{p}. \end{aligned}$$

Aplicando esta transformación en las ecuaciones anteriores, y combinando la primera con la tercera, obtenemos:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} (u - c)i\bar{k}\bar{u} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{v} &= -\frac{i\bar{k}}{\rho_0}\bar{p}, \\ (u - c)i\bar{k}\bar{v} &= -\frac{\bar{p}}{\rho_0}g - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \\ i\bar{k}\bar{u} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son iguales a (2.12), pero con $m = \hat{w} = 0$. Por consiguiente, a cada perturbación tridimensional le corresponde una perturbación equivalente bidimensional. Además, en las ecuaciones (2.12), la amplitud de las perturbaciones varía según $\text{Im}(\omega)$, mientras que en (2.13) lo hacen según $\text{Im}\left(\frac{\bar{k}}{k}\omega\right)$. Como la transformación de Squire implica $\bar{k} > k$, necesariamente estas perturbaciones bidimensionales serán más inestables que sus correspondientes tridimensionales.

2.3. Ecuación de Taylor-Goldstein

Consideremos un fluido incompresible, con un estado inicial como el considerado en la sección 2.2. En virtud de lo analizado en dicha sección, para determinar la estabilidad lineal de dicho fluido, basta restringirse a perturbaciones bidimensionales. Dichas perturbaciones deben satisfacer las ecuaciones

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= -\frac{\bar{p}}{\rho_0}g - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, linealizando la ecuación de transporte de la densidad $\frac{D\bar{\rho}}{Dt} = 0$, obtenemos

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \bar{\rho}_0}{\partial y} = 0.$$

Utilizando la frecuencia de flotabilidad N , esta ecuación puede ser reescrita como

$$(2.15) \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} - \frac{\rho_0\tilde{v}}{g}N^2 = 0.$$

Como la perturbación satisface la ecuación de continuidad, podemos definir una función de corriente ψ para la misma, que debe satisfacer

$$\tilde{u} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \tilde{v} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

De esta forma, las ecuaciones (2.14) y (2.15) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial y} + u \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x} + u \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \frac{\rho}{\rho_0} g + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\rho_0}{g} N^2 \frac{\partial\psi}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Buscando soluciones de la forma

$$\begin{aligned} \psi &= \hat{\psi}(y)e^{i(kx-\omega t)}, \\ \rho &= \hat{\rho}(y)e^{i(kx-\omega t)}, \\ p &= \hat{p}(y)e^{i(kx-\omega t)}, \end{aligned}$$

las ecuaciones anteriores quedan

$$\begin{aligned} (uk - \omega) \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y} - k\hat{\psi} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{k}{\rho_0} \hat{p}, \\ (uk - \omega)k\hat{\psi} &= -\frac{\hat{\rho}}{\rho_0} g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\hat{p}}{\partial y}, \\ (uk - \omega)\hat{\rho} + \frac{\rho_0}{g} N^2 k\hat{\psi} &= 0. \end{aligned}$$

Derivando la primera identidad respecto a y y combinándola con la segunda, obtenemos

$$(uk - \omega) \left(\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial y^2} - k^2\hat{\psi} \right) - k\hat{\psi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{k\hat{\rho}}{\rho_0} g,$$

y con la tercera ecuación podemos sustituir $\hat{\rho}$:

$$(uk - \omega) \left(\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial y^2} - k^2\hat{\psi} \right) - k\hat{\psi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{N^2 k^2 \hat{\psi}}{(uk - \omega)} = 0.$$

En términos de la velocidad de la perturbación $c = \omega/k$, esta igualdad puede ser escrita de la forma

$$(2.16) \quad \frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{u-c} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{N^2}{(u-c)^2} + k^2 \right) \hat{\psi},$$

llamada ecuación de Taylor-Goldstein. La misma gobierna el comportamiento de perturbaciones infinitesimales en un flujo estratificado y paralelo. Una vez consideradas las condiciones de borde, tendremos una solución $\hat{\psi}$, dependiente de c, k . Si existen un número de onda $k \in \mathbb{R}$ y un $c \in \mathbb{C}$ con parte imaginaria positiva soluciones de (2.16), entonces el estado inicial será inestable.

En general, para determinar la estabilidad lineal de un estado inicial se debe apelar a una resolución numérica de la ecuación de Taylor-Goldstein. En la sección

2.5 se presentan algunos resultados de [26] acerca de la estabilidad de ciertos perfiles suaves. Como pauta general, definiendo el número de Richardson

$$\text{Ri} = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

se tiene garantizada la estabilidad lineal si $\text{Ri} > 1/4$ en todo el fluido ([31], páginas 464 y 465).

2.4. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

La inestabilidad que ocurre en la interfase entre dos capas de fluido paralelas, de densidades distintas, se denomina *inestabilidad de Kelvin-Helmholtz*. En general, se utiliza este nombre para describir inestabilidades producidas cuando las variaciones de densidad y velocidad son continuas y ocurren en un espesor finito ([31], sección 6 del capítulo 12).

Consideremos dos capas de fluidos perfectos incompresibles de espesor infinito, de densidades distintas y velocidades unidireccionales constantes (figura 2.4). Supongamos también que la interfase tiene espesor nulo, y denotemos con subíndi-

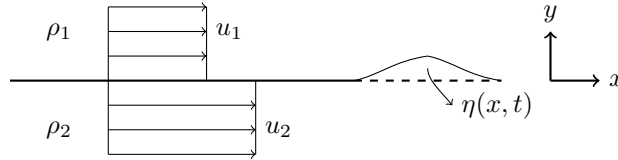


FIGURA 2.4. Velocidad discontinua en una interfase de espesor nulo.

ces 1 y 2 las propiedades en la capa de arriba y en la de abajo, respectivamente.

Observemos que como en este estado inicial los campos de velocidades de ambos fluidos son irrotacionales, el teorema de Lagrange 1.1 implica que al imponer una perturbación a la interfase los movimientos deben permanecer irrotacionales. Tenemos además que existen potenciales de cada uno de los campos de velocidades; llamemos $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_2$ a estos potenciales para el estado perturbado. Entonces, podemos escribir los flujos como el estado inicial más perturbaciones:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \tilde{\phi}_1(x, y, t) &= u_1 x + \phi_1(x, y, t), \\ \tilde{\phi}_2(x, y, t) &= u_2 x + \phi_2(x, y, t). \end{aligned}$$

Por otra parte, la incompresibilidad implica que los potenciales son armónicos, y sustituyendo en (2.17), los potenciales de las perturbaciones también deben ser armónicos:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \Delta \phi_1 &= 0, \\ \Delta \phi_2 &= 0. \end{aligned}$$

En el estado perturbado, se deben satisfacer ciertas condiciones de borde. En primer lugar, las perturbaciones deben desvanecerse lo suficientemente lejos de la interfase:

$$(2.19) \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \phi_1(x, y, t) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \phi_2(x, y, t) = 0.$$

Las partículas en la interfase deben moverse con la misma velocidad que la perturbación: en $y = \eta(x)$, se deben cumplir

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(u_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(u_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial y}.\end{aligned}$$

Estas condiciones puede ser linealizadas y evaluadas en $y = 0$, y obtenemos

$$(2.20) \quad \begin{aligned}\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{y=0} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{y=0}.\end{aligned}$$

La presión debe ser igual en ambos fluidos en la interfase. Esta condición debe ser satisfecha tanto en el estado inicial como en el perturbado, y será aplicada en las funciones de Bernoulli. En el estado inicial, tenemos

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1(y)}{\rho_1} + gy = C_1, \quad \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2(y)}{\rho_2} + gy = C_2,$$

de modo que para que haya equilibrio en la interfase $y = 0$, es necesario

$$(2.21) \quad \rho_1 \left(C_1 - \frac{u_1^2}{2} \right) = p_1(0) = p_2(0) = \rho_2 \left(C_2 - \frac{u_2^2}{2} \right).$$

En el estado perturbado, las funciones de Bernoulli son

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial t} + \frac{|\nabla \hat{\phi}_1|^2}{2} + \frac{\hat{p}_1}{\rho_1} + gy &= C_1, \\ \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial t} + \frac{|\nabla \hat{\phi}_2|^2}{2} + \frac{\hat{p}_2}{\rho_2} + gy &= C_2,\end{aligned}$$

e imponiendo $\hat{p}_1(x, \eta, t) = \hat{p}_2(x, \eta, t)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\rho_1 \left(C_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{(u_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x})^2}{2} - \frac{(\frac{\partial \phi_1}{\partial y})^2}{2} - g\eta \right) &= \\ \rho_2 \left(C_2 - \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{(u_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x})^2}{2} - \frac{(\frac{\partial \phi_2}{\partial y})^2}{2} - g\eta \right) &.\end{aligned}$$

Linealizando esta ecuación, evaluándola en $y = 0$ y utilizando (2.21), obtenemos

$$(2.22) \quad \rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + g\eta \right) \Big|_{y=0} = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g\eta \right) \Big|_{y=0}.$$

Tenemos entonces que las perturbaciones de las velocidades y de la posición de la interfase deben satisfacer las ecuaciones (2.18), (2.19) (2.20) (2.22). Buscando soluciones de la forma

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= \hat{\eta} e^{i(kx - \omega t)}, \\ \phi_1(x, y, t) &= \hat{\phi}_1(y) e^{i(kx - \omega t)}, \\ \phi_2(x, y, t) &= \hat{\phi}_2(y) e^{i(kx - \omega t)},\end{aligned}$$

y aplicando las condiciones (2.18) y (2.19), se tienen

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1(y) &= A e^{-ky}, \\ \hat{\phi}_2(y) &= B e^{ky}.\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.20), tenemos

$$\begin{aligned} kA &= \hat{\eta}i(\omega - u_1k), \\ kB &= -\hat{\eta}i(\omega - u_2k). \end{aligned}$$

En estas ecuaciones, si $k = 0$, entonces necesariamente $\omega = 0$ o $\hat{\eta} = 0$, por lo que este modo no puede ser inestable. En adelante, asumiremos $k \neq 0$, y tendremos

$$A = \hat{\eta}i \left(\frac{\omega}{k} - u_1 \right), \quad B = -\hat{\eta}i \left(\frac{\omega}{k} - u_2 \right).$$

Por otro lado, sustituyendo los modos normales en la relación (2.22), se tiene

$$\rho_1 (-Ai(\omega - u_1k) + g\hat{\eta}) = \rho_2 (-Bi(\omega - u_2k) + g\hat{\eta}),$$

y reemplazando A, B , obtenemos la relación de dispersión:

$$D(\omega, k, \rho_1, \rho_2, u_1, u_2) = \frac{\rho_1}{k}(\omega - u_1k)^2 + \frac{\rho_2}{k}(\omega - u_2k)^2 - g(\rho_2 - \rho_1).$$

Esta ecuación tiene soluciones, para cada $k \in \mathbb{R}$:

$$\omega(k) = k \left(\frac{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) \pm \left(kg \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \right) - \rho_1 \rho_2 \frac{k^2 (u_1 - u_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \right)^{1/2}.$$

Observemos que $\omega(k)$ es real siempre y cuando el término en la raíz cuadrada sea positivo. Sin embargo, tendremos un modo temporal con parte imaginaria positiva si

$$g(\rho_2^2 - \rho_1^2) < k\rho_1\rho_2(u_1 - u_2)^2.$$

De esta forma, el estado inicial siempre es inestable, pues a partir de un número de onda suficientemente grande los modos crecerán en el tiempo.

2.5. Interfases de espesor no nulo entre capas infinitas

En esta sección analizaremos, en un ejemplo concreto, el efecto de aproximar un campo de velocidades y densidades continuos mediante capas de velocidad y densidad homogéneas. Para el caso de un fluido no acotado verticalmente, con campos de velocidades y densidades suaves $\mathbf{u}(y)$ y $\rho(y)$, tenemos que las perturbaciones están gobernadas por la ecuación de Taylor-Goldstein (2.16).

Queremos modelar el flujo de dos capas de densidades distintas, separadas por una interfase de altura $2d$. Utilizaremos este espesor de la interfase para adimensionalizar las longitudes; tomaremos $y^* = \frac{y}{d}$. En adelante sólo trabajaremos con longitudes adimensionalizadas, por lo que las denotaremos sin utilizar el asterisco. Asimismo, trabajaremos con números de onda adimensionalizados, $\alpha = kd$.

Los perfiles de velocidad y densidad del fluido en el estado inicial están dados por $\mathbf{u}(y) = U(y)\hat{e}_1$, con

$$(2.23) \quad \begin{aligned} U(y) &= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} \tanh(y), \\ \rho(y) &= \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \tanh(y). \end{aligned}$$

La elección de este estado inicial se debe a que se ajusta adecuadamente a los resultados experimentales para dos capas con un cortante de velocidades [43]. Los perfiles (2.23) se presentan gráficamente en la figura 2.5.

Hazel [26] propone escribir los campos de velocidades y densidades de la forma

$$\begin{aligned} U(y) &= Vu(y), \quad \text{con } u'(0) = 1, \\ \ln \left(\frac{\rho(y)}{\rho(0)} \right) &= \sigma\beta(y), \quad \text{con } \beta'(0) = 1. \end{aligned}$$

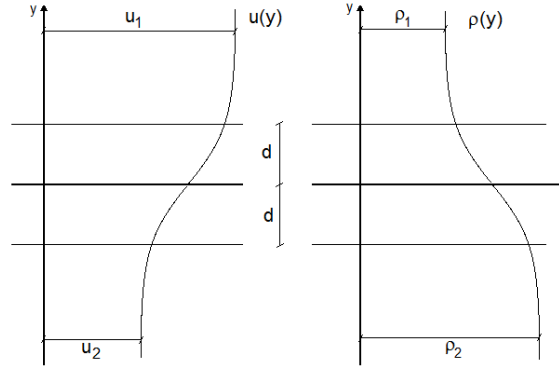


FIGURA 2.5. Perfiles de velocidad y densidad iniciales (2.23).

De esta forma, se tiene que V es una medida típica de velocidad, y σ una de la variación relativa de densidad. La frecuencia de flotabilidad es

$$N^2(y) = \frac{\sigma g}{d} \beta'(y),$$

y el número de Richardson local es

$$\text{Ri}(y) = \frac{J\beta'(y)}{(u'(y))^2}, \text{ donde } J = \frac{\sigma g d}{V^2}.$$

La elección de estas escalas para U y ρ implican que J es el número de Richardson en $y = 0$. Para el estado inicial (2.23), si escribimos $\rho_1 = r\rho_2$, tenemos

$$V = \frac{u_1 - u_2}{2} \quad \text{y} \quad \sigma = \frac{1 - r}{1 + r},$$

de modo que

$$J = \frac{4(1 - r)gd}{(1 + r)(u_1 - u_2)^2}.$$

Con estas nuevas variables, la ecuación de Taylor-Goldstein en forma adimensionalizada es

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} = \left(\frac{u''}{u - c} - \frac{J\beta'}{(u - c)^2} + \alpha^2 \right) \hat{\psi},$$

donde c es la velocidad de fase adimensionalizada. Observemos que si $\hat{\psi}$ es solución de la ecuación anterior con un valor propio asociado c , entonces su conjugada compleja $\hat{\psi}^*$ es solución para el valor propio c^* . Luego, para cada modo que decae en el tiempo existe uno que crece. Por lo tanto, una solución $\hat{\psi}$ es estable si y sólo si su valor propio asociado es real.

Siguiendo [21] (sección 44) y [42], la curva de estabilidad marginal en el plano $\alpha - J$ está dada por $J = \alpha(1 - \alpha)$, y obtenemos el diagrama presentado en la figura 2.6.

Queremos aproximar el estado inicial dado por (2.23) mediante dos capas homogéneas, de velocidades u_1, u_2 y densidades ρ_1, ρ_2 , respectivamente. Para este estado inicial, que fue considerado en la sección anterior, obtuvimos que los modos neutralmente estables tienen número de onda

$$k = \frac{g(1 - r^2)}{r(u_1 - u_2)^2}.$$

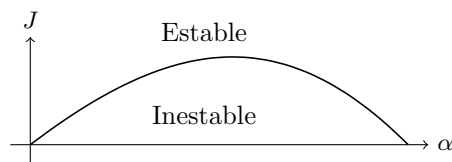


FIGURA 2.6. Diagrama de estabilidad lineal de modos para los perfiles de velocidades y densidades (2.23).

Adimensionalicemos el número de onda de la misma forma que antes, y consideremos el mismo parámetro J . En este caso, tanto la adimensionalización como el número J carecen de significado físico, pero nos permiten comparar las regiones de estabilidad para los dos estados iniciales.

La curva de estabilidad neutral en el plano $\alpha - J$ para este estado inicial discreto es

$$J = \frac{4r}{(1+r)^2} \alpha.$$

Estas rectas en el plano presentan, para valores de r cercanos a 1, poca variación de pendiente. En el caso límite en que $r = 1$, obtenemos la recta $J = \alpha$, mientras que para $r = 0.7$, la pendiente de la recta es aproximadamente 0.97. En la figura 2.7 se presentan las regiones de estabilidad en el plano $\alpha - J$ tanto para el estado inicial como para la aproximación discreta en el caso en que $r = 0.95$. En la zona en gris ambos estados son linealmente estables. En el caso en que $r = 1$, la recta es tangente a la parábola; la poca variación de la pendiente respecto a r nos permite afirmar que cuando el modelo en dos capas es linealmente estable, entonces el estado continuo también lo es. Sin embargo, la afirmación recíproca es falsa: en la zona sobre la parábola y a la derecha de la recta, el estado inicial (2.23) es estable, aunque la aproximación por dos capas no lo es.

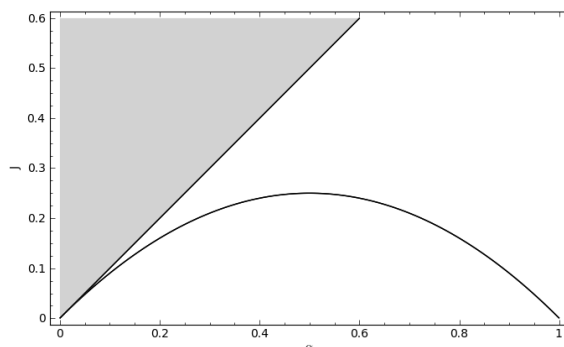


FIGURA 2.7. Regiones de estabilidad e inestabilidad lineal para los estados iniciales considerados en esta sección.

2.6. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en aguas someras

A continuación analizaremos una situación similar a la presentada en la sección 2.4, en la que se tienen dos fluidos homogéneos de densidades distintas, pero con la hipótesis adicional de aguas someras. De acuerdo a lo observado en la sección 1.3,

esta hipótesis es equivalente a suponer que la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz sólo se puede manifestar en modos con número de onda muy pequeño.

2.6.1. Flujos confinados. Consideremos un estado inicial como el presentado en la figura 2.8, en la que se tienen dos capas de fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2 , desplazándose paralelamente con velocidades respectivas $u_1(x)$ y $u_2(x)$. Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ las alturas respectivas de estos fluidos. El sistema se encuentra acotado superiormente por una tapa, e inferiormente por un fondo con nivel $h(x)$ respecto

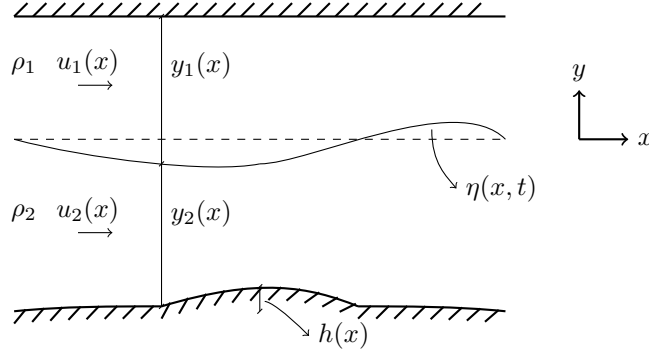


FIGURA 2.8. Perturbación sobre el flujo de dos capas uniformes confinadas superiormente.

a cierta recta horizontal de referencia. Supondremos que h varía lentamente, de modo que las líneas de flujo puedan ser aproximadamente horizontales, y que h es pequeño en comparación con los espesores de las capas.

Al imponer una perturbación en la interfase $\eta(x, t)$, las ecuaciones que gobiernan el estado perturbado serán análogas a las obtenidas en la sección 2.4, pero habrá diferencias en las condiciones de borde. Consideremos $\hat{\phi}_1$ y $\hat{\phi}_2$ como dos potenciales para las velocidades respectivas del estado perturbado, y ϕ_1, ϕ_2 como potenciales para las perturbaciones de las velocidades. Como consecuencia de la incompresibilidad, estos dos últimos potenciales deben satisfacer la ecuación de Laplace (2.18). Al considerar que las partículas de la interfase se desplazan a igual velocidad que la perturbación, obtenemos ecuaciones análogas a (2.20). Asimismo, al igualar las presiones en la interfase y linealizar se obtiene una ecuación como (2.22). En este caso, las condiciones de borde son cinemáticas: las velocidades verticales de los fluidos en las paredes deben ser nulas,

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, y_1(x), t) = 0, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x, -y_2(x), t) = 0, \quad \forall x, t.$$

Aquí se está despreciando la perturbación de la interfase frente a los espesores de ambas capas.

Al buscar soluciones de la forma

$$\phi_i(x, y, t) = \hat{\phi}_i(y)e^{i(kx - \omega t)}, \quad i = 1, 2,$$

e imponer las condiciones de borde, considerando despreciables las derivadas h'_1, h'_2 , obtenemos

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, t) &= A \cosh(k(y - y_1))e^{i(kx - \omega t)}, \\ \phi_2(x, y, t) &= B \cosh(k(y + y_2))e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned}$$

Asumamos, sin perder generalidad, que $k > 0$. Imponiendo que el desplazamiento de la interfase sea de la forma $\eta(x, t) = \hat{\eta}e^{i(kx - \omega t)}$, y aplicando las ecuaciones (2.20), se deduce

$$A = -\frac{(u_1 - c)^2 i \hat{\eta}}{\sinh(ky_1)}, \quad B = \frac{(u_2 - c)^2 i \hat{\eta}}{\sinh(ky_2)},$$

donde $c = \omega/k$ es la velocidad de onda. Luego de sustituir en la ecuación (2.22) y simplificar, obtenemos la relación de dispersión:

$$D(k, c; \mathcal{R}) = k \left(\frac{\rho_1 (u_1 - c)^2}{\tanh(ky_1)} + \frac{\rho_2 (u_2 - c)^2}{\tanh(ky_2)} \right) - g(\rho_2 - \rho_1) = 0,$$

donde $\mathcal{R} = (\rho_1, \rho_2, u_1, u_2, y_1, y_2)$ es el conjunto de parámetros que definen el estado inicial. Observemos que, fijados \mathcal{R} y k , esta relación de dispersión es un polinomio de grado 2 en c con coeficientes reales, de modo que si tiene una solución con parte imaginaria no nula, su complejo conjugado también será solución. Por lo tanto, para asegurar la estabilidad lineal es necesario y suficiente que para todo k las dos raíces de la relación de dispersión sean reales, es decir, que el discriminante de este polinomio sea mayor o igual que cero. Otra consecuencia de la forma de esta relación de dispersión es que de ser linealmente estable, el estado inicial es neutralmente estable: las perturbaciones no decaerían en el tiempo, sino que mantendrían su amplitud.

Considerando el cociente de densidades $r = \frac{\rho_1}{\rho_2} < 1$, el discriminante de D es

$$\Delta = \frac{4k\rho_2^2}{\tanh(ky_1)\tanh(ky_2)} (g(1-r)(\tanh(ky_1) + r\tanh(ky_2)) - kr(u_1 - u_2)^2).$$

Llamemos λ al cociente entre las alturas de los fluidos, $\lambda = \frac{y_1}{y_2}$, y definamos la distancia adimensionalizada $\alpha = ky_2$. Tendremos asegurada la estabilidad lineal si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple $f(\alpha) \geq \mathcal{P}$, donde

$$f(\alpha) = \frac{\tanh(\lambda\alpha) + r\tanh(\alpha)}{\alpha(1+\lambda)},$$

y \mathcal{P} es el parámetro adimensionalizado

$$\mathcal{P} = \frac{r(u_1 - u_2)^2}{g(1-r)(y_1 + y_2)}.$$

La forma típica del gráfico de f se presenta en la figura 2.9. Los resultados tienen

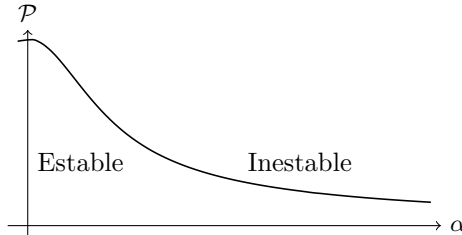


FIGURA 2.9. Regiones de estabilidad e inestabilidad en el plano $\alpha - \mathcal{P}$ para el estado inicial considerado en esta sección.

cierta similitud con los obtenidos para capas infinitamente profundas: incondicionalmente existen números onda inestables. Sin embargo, aquí entra en juego la

hipótesis de aguas someras, ya que las únicas ondas que se pueden manifestar en este modelo son las que tienen número de onda $k \approx 0$. Por lo tanto, el estado inicial es estable si y sólo si $f(0) \geq \mathcal{P}$. En el caso en que las capas tengan densidades muy similares, en el que se puede considerar $r \approx 1$, tenemos la condición de estabilidad

$$(2.24) \quad \frac{(u_1 - u_2)^2}{g(1-r)(y_1 + y_2)} < 1,$$

introducida en [36, 44].

2.6.2. Flujos a superficie libre. Consideremos un flujo de dos capas en un canal abierto, como en la figura 2.10. Aquí, si perturbamos la interfase entre los

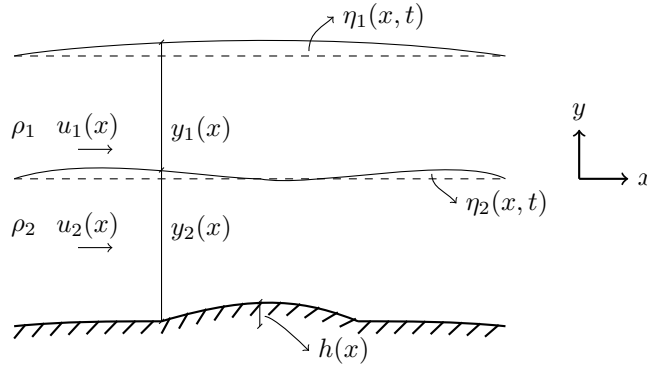


FIGURA 2.10. Perturbación sobre el flujo de dos capas uniformes a superficie libre.

fluidos, tendremos que tener en cuenta tanto el desplazamiento de la misma como el de la superficie libre del sistema.

Apliquemos un desarrollo análogo al del caso donde los fluidos estaban confinados: considerando ϕ_1 , ϕ_2 potenciales para las perturbaciones de las velocidades, aplicando la condición de incompresibilidad y la condición de borde

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x, -y_2(x)) = 0,$$

obtenemos modos normales de la forma

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, t) &= (Ae^{ky} + A'e^{-ky}) e^{i(kx - \omega t)}, \\ \phi_2(x, y, t) &= B \cosh(k(y + y_2)) e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned}$$

Por otra parte, tanto en la interfase entre los dos fluidos como en la superficie libre se debe tener equilibrio en las presiones e igualdad de velocidades. Escribiendo los desplazamientos η_1 y η_2 como

$$\begin{aligned} \eta_1(x, t) &= \hat{\eta}_1 e^{i(kx - \omega t)}, \\ \eta_2(x, t) &= \hat{\eta}_2 e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned}$$

con $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$, y aplicando las condiciones mencionadas, se obtiene un sistema lineal homogéneo de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, $\mathbf{A}\mathbf{v} = 0$. Aquí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e^{ky_1} & -e^{-ky_1} & 0 & i(c-u_1) & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & i(c-u_1) \\ 0 & 0 & \sinh(ky_2) & 0 & i(c-u_2) \\ -ik(c-u_1)e^{ky_1} & -ik(c-u_1)e^{-ky_1} & 0 & g & 0 \\ ik\rho_1(c-u_1) & ik\rho_1(c-u_1) & -ik\rho_2(c-u_2)\cosh(ky_2) & 0 & (\rho_2-\rho_1)g \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} A \\ A' \\ B \\ \hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_2 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{\omega}{k}.$$

Tendremos soluciones no triviales si y sólo si $\det(\mathbf{A}) = 0$. Este determinante es un polinomio de grado cuatro en c , y nos da la relación de dispersión para el estado inicial considerado. Al igual que en el caso anterior, tendremos asegurada la estabilidad lineal si y sólo si este polinomio tiene cuatro raíces reales. Sin embargo, no se ha podido encontrar condiciones necesarias y suficientes ‘manejables’ para que esto ocurra³.

Teniendo en cuenta que sólo nos van a interesar los modos normales con $k \approx 0$, aproximemos los términos no lineales en k de la matriz \mathbf{A} por sus polinomios de Taylor de primer grado alrededor de dicho punto. Así se obtiene una matriz

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1+ky_1 & -1+ky_1 & 0 & i(c-u_1) & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & i(c-u_1) \\ 0 & 0 & ky_2 & 0 & i(c-u_2) \\ -ik(c-u_1)(1+ky_1) & -ik(c-u_1)(1-ky_1) & 0 & g & 0 \\ ik\rho_1(c-u_1) & ik\rho_1(c-u_1) & -ik\rho_2(c-u_2) & 0 & (\rho_2-\rho_1)g \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es

$$\det(\tilde{\mathbf{A}}) = -2k^2\rho_2 \left[c^4 - 2(u_1+u_2)c^3 + ((u_1+u_2)^2 + 2u_1u_2 - g(y_1+y_2))c^2 + 2(g(y_1u_2+y_2u_1) - u_1u_2(u_1+u_2))c + u_1^2u_2^2 + y_1y_2g^2(1-r) - g(y_1u_2^2+y_2u_1^2) \right] + \mathcal{O}(k^4).$$

Despreciando el último infinitésimo, obtenemos la relación de dispersión:

$$D(k, c, \mathcal{R}) = P(c) := ((u_1-c)^2 - gy_1)((u_2-c)^2 - gy_2) - rg^2y_1y_2 = 0.$$

Es claro que este polinomio tiene por lo menos dos raíces reales, ya que es de grado cuatro, con coeficiente principal positivo y verifica $P(u_i \pm \sqrt{gh_i}) = -rg^2y_1y_2$. Estas dos raíces, que indican dos posibles velocidades de propagación de perturbaciones en el sistema, corresponden al llamado *modo externo*. En caso de que las otras dos raíces sean reales, corresponden al *modo interno*. Por lo general, los modos externos son mucho más rápidos que los internos (figura 2.11).

En caso de que $r \approx 1$, se tienen las siguientes aproximaciones para los modos externo e interno del sistema [44]:

$$(2.25) \quad \begin{aligned} c_{ext} &= \frac{y_1u_1+y_2u_2}{y_1+y_2} \pm \sqrt{g(y_1+y_2)}, \\ c_{int} &= \frac{y_1u_2+y_2u_1}{y_1+y_2} \pm \sqrt{g(1-r)\frac{y_1y_2}{y_1+y_2} \left[1 - \frac{(u_1-u_2)^2}{g(1-r)(y_1+y_2)} \right]}. \end{aligned}$$

³Para este trabajo se buscaron dichas condiciones a partir del teorema de Sturm, pero la extensión de los coeficientes obtenidos hace que las mismas sean inútiles para obtener conclusiones generales.

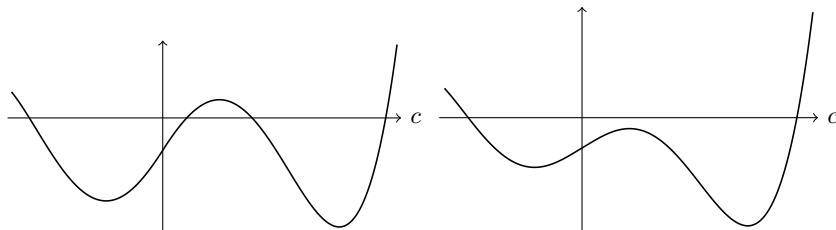


FIGURA 2.11. Formas típicas del gráfico de $P(c)$, con dos o cuatro raíces reales.

Estas expresiones sugieren que para tener asegurada la estabilidad lineal del sistema, el término dentro de la raíz cuadrada en c_{int} debería ser positivo. La condición de estabilidad obtenida de esta forma coincide con (2.24). De hecho, se suele utilizar este criterio como condición necesaria de estabilidad lineal [36, 2]. Sin embargo, debe ser considerado tan solo como un indicador aproximado: no es una condición necesaria ni suficiente [1, 11]. En esta última referencia se demuestra que el estado inicial también es estable si el número de Froude $F = \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{gy_1}}$ es suficientemente grande⁴.

Nos referiremos a la hipótesis de aproximar un flujo a superficie libre por uno confinado como *hipótesis de tapa rígida*⁵. De acuerdo a Benton [14], en un sistema de múltiples capas como el considerado, si la variación relativa de densidades de una capa a otra es pequeña, los modos internos para un flujo a superficie libre son aproximadamente iguales a los correspondientes para un flujo acotado superiormente por una pared. En el próximo capítulo se justificará esta aproximación.

⁴Si bien este resultado choca con la intuición y es “no deseable”, deja marcada una limitación del modelo físico.

⁵En la literatura se la menciona como *rigid-lid assumption*.

Flujos estratificados

En este capítulo se presentan definiciones y resultados análogos a varios de los expuestos en el capítulo 1. Por lo general, el pasaje de fluidos homogéneos a fluidos con estratificaciones arbitrarias vuelve dificultoso definir ciertos conceptos (control, número de Froude), de modo que resulta conveniente trabajar con modelos en capas.

La primera sección de este capítulo está dedicada a definir controles hidráulicos para flujos en capas, comparando el caso a superficie libre con el de un sistema confinado: en caso de que el número de Froude de cada capa sea pequeño y que las variaciones de densidad relativas también, las condiciones de criticalidad coinciden. La sección 3.2 presenta ciertas condiciones para tener control en un fluido continuamente estratificado. Las mismas resultan mucho más complicadas en general que las correspondientes a flujos en capas.

Luego, en las secciones 3.3 y 3.4 se trabaja con flujos de dos capas. En la primera, se presenta el número de Froude compuesto y se muestran ciertas simplificaciones posibles en este problema. En la segunda se introduce el plano de números de Froude, y se lo utiliza para analizar flujos a través de contracciones laterales y sobre topografía.

La sección 3.5 trata sobre resaltos internos en flujos en capas, y se presentan los modelos clásicos de saltos débiles internos, así como un modelo simple que introduce la posibilidad de que exista mezcla y arrastre entre las capas. Finalmente, en la sección 3.6 se muestra una clasificación del flujo estacionario de dos capas sobre topografía.

3.1. Controles hidráulicos en flujos discretamente estratificados

En el capítulo 1 se presentaron los controles hidráulicos para flujos de fluidos homogéneos en canales como aquellas secciones que determinan localmente una relación entre el tirante del canal, el caudal que circula y la energía interna. En esta sección buscaremos condiciones que permitan determinar la ubicación de controles hidráulicos para flujos de fluidos estratificados.

Una característica compartida por los controles hidráulicos -con la excepción de los artificiales- en flujos de fluidos homogéneos es que se tiene estado crítico en la sección del control. Sin embargo, para fluidos estratificados carecemos de un único número de Froude. Por ejemplo, en el capítulo 2, al analizar el flujo a superficie libre de dos capas, se observó que en caso de que fuera estable, las perturbaciones pueden desplazarse según un modo interno y otro externo. Luego, podríamos definir dos números de Froude distintos: uno para establecer el régimen crítico respecto al modo interno y otro respecto al modo externo.

Definimos *estado crítico* como aquella distribución de velocidades en el fluido estratificado que tiene la propiedad de que anula la velocidad de propagación de

alguna perturbación. Esta definición generaliza a la presentada en el capítulo 1. Recordemos que en el caso de un fluido homogéneo, el estado crítico representa un mínimo en la energía interna y en el momento en función del tirante del canal. En los fluidos estratificados ocurre algo similar.

3.1.1. Flujo crítico para estratificaciones discretas con superficie libre. Supongamos que tenemos un sistema formado por n capas homogéneas, numeradas de arriba hacia abajo, de densidades ρ_i , espesores y_i , desplazándose con velocidades u_i , y con una superficie libre (figura 3.1). Asumiremos también que el

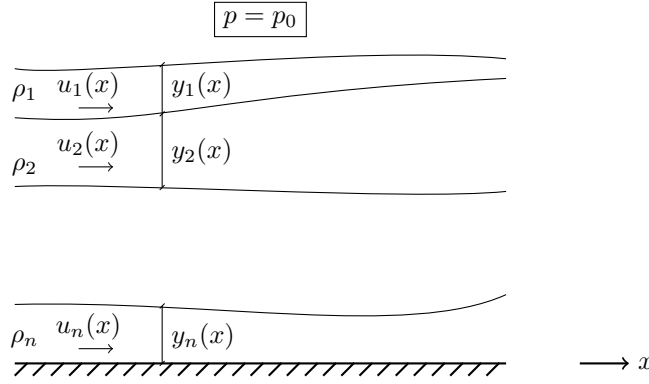


FIGURA 3.1. Flujo de n capas uniformes a superficie libre.

flujo de cada capa es unidireccional, y que estamos en hipótesis de aguas someras. Consideremos conocidos y fijos los caudales por unidad de ancho, q_i .

Sea E_i la energía interna de la i -ésima capa, entonces tendremos

$$(3.1) \quad E_i = \frac{q_i^2}{2gy_i^2} + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ji}y_j + \sum_{j=i}^n y_j,$$

donde $r_{ji} = \rho_j/\rho_i$. Impongamos una perturbación infinitesimal, y tomemos un referencial solidario con dicha perturbación. Entonces, la altura de alguna de las capas debe variar, esto es, $\partial y_j/\partial x \neq 0$ para algún j . Asimismo, si no tenemos en cuenta los efectos de la fricción, la energía interna de cada capa debe permanecer constante:

$$(3.2) \quad \frac{\partial E_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial E_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Tenemos así un sistema de n ecuaciones, una para la energía interna de cada capa, con n incógnitas,

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = 0,$$

donde $\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}}\right)_{ij} = \frac{\partial E_i}{\partial y_j}$ y $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x}\right)^\top$. Como estamos suponiendo que por lo menos una de las capas debe verificar $\partial y_j/\partial x \neq 0$, este sistema debe tener soluciones no triviales. Tenemos así una condición para estado crítico:

$$(3.3) \quad \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} \right| = 0.$$

Utilizando la definición de energía interna (3.1), obtenemos explícitamente la condición

$$(3.4) \quad \begin{vmatrix} 1 - F_1^2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_{12} & 1 - F_2^2 & 1 & \dots & 1 \\ r_{13} & r_{23} & 1 - F_3^2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n} & \dots & 1 - F_n^2 \end{vmatrix} = 0,$$

donde los $F_i^2 = \frac{q_i^2}{gy_i^3}$ son un número de Froude externo de cada capa. Este determinante puede ser reescrito de forma tridiagonal:

$$(3.5) \quad \begin{vmatrix} -1 + F_1^2 & F_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ r_{12}F_1^2 & r_{12} - 1 + F_2^2 + r_{12}F_1^2 & F_2^2 & \dots & 0 \\ 0 & r_{23}F_2^2 & r_{23} - 1 + F_3^2 + r_{23}F_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & F_{n-1}^2 \\ 0 & \dots & 0 & r_{n-1n}F_{n-1}^2 & r_{n-1n} - 1 + F_n^2 + r_{n-1n}F_{n-1}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Observemos que si llamamos c a la velocidad de la perturbación respecto al canal, y $v_i = u_i + c$ a la de cada capa, entonces $F_i^2 = \frac{u_i^2}{gy_i} = \frac{(v_i - c)^2}{gy_i}$, de donde (3.4) se transforma en una ecuación polinomial de grado $2n$ en c . Esta ecuación tendrá a lo sumo $2n$ soluciones. De hecho, un desarrollo análogo a presentado en el capítulo 2 permite probar que para que el sistema sea estable es necesario y suficiente que existan todas estas soluciones. En caso de estabilidad, tendremos n modos, y cada modo se manifestará con dos velocidades de propagación.

De forma similar al caso de un fluido homogéneo, si un modo presenta una velocidad de propagación positiva y otra negativa, diremos que el flujo se encuentra en *estado subcrítico* respecto a dicho modo. En cambio, si ambas velocidades de propagación tienen el mismo signo, diremos que el flujo es *supercrítico* respecto al modo.

Veamos que la energía interna de cada capa presenta un mínimo relativo en un estado crítico. Consideremos, fijados los caudales de cada capa, una distribución de velocidades “cercana” a un estado crítico. Aplicando un desarrollo de Taylor alrededor del estado crítico, se tiene

$$\begin{aligned} \Delta E_i &= E_i(y_1, \dots, y_n) - E_i(y_1, \dots, y_n)_c = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial E_i}{\partial y_j} \Delta y_j + d^2 E_i(\Delta y_1, \dots, \Delta y_n) + r_2(\Delta y_1, \dots, \Delta y_n). \end{aligned}$$

Si consideramos los Δy_j infinitesimales, entonces (3.2) implica que el término de primer orden es nulo. Aplicando la definición de energía interna (3.1) y considerando solo el término de segundo orden, obtenemos

$$(3.6) \quad \Delta E_i = \frac{3q_i^2(\Delta y_i)^2}{gy_i^4},$$

de donde todos los E_i son mínimos en condiciones críticas.

Analicemos lo que ocurre con la función de momento de cada capa,

$$M_i = \frac{q_i^2}{gy_i} + \left(\sum_{j=1}^{i-1} r_{ji} y_j \right) y_i + \frac{y_i^2}{2},$$

y consideremos también la función de momento total del sistema, $M_T = \sum_i M_i$. Tomemos un estado cercano al crítico y apliquemos el desarrollo de Taylor:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \Delta M_T &= M_T(y_1, \dots, y_n) - M_T(y_1, \dots, y_n)_c = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial M_i}{\partial y_j} \Delta y_j + d^2 M_T(\Delta y_1, \dots, \Delta y_n) + r_2(\Delta y_1, \dots, \Delta y_n). \end{aligned}$$

Como la presión en la superficie libre permanece constante y el fondo del canal es horizontal, se cumple $\frac{\partial M_T}{\partial x} = 0$. Luego,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial M_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x} = 0,$$

de forma que asumiendo los incrementos Δy_j infinitesimales, tendremos que el primer término del desarrollo (3.7) es cero [14].

Retenemos solo el término de segundo orden:

$$\Delta M_T = \sum_{i=1}^n \left[(1 + 2F_i^2) \frac{\Delta y_i^2}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{r_{ji} \Delta y_j \Delta y_i}{2} \right].$$

A partir de (3.2) y calculando las derivadas allí presentes,

$$\sum_{j=1}^i r_{ji} \Delta y_j + \sum_{j=i+1}^n \Delta y_j - F_i^2 \Delta y_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Multiplicando estas relaciones por $\frac{\Delta y_i}{2}$, sustituyendo en la ecuación anterior y simplificando, obtenemos:

$$(3.8) \quad \Delta M_T = \sum_{i=1}^n \frac{3}{2} F_i^2 \Delta y_i^2 > 0.$$

De esta forma, el estado crítico corresponde a un mínimo relativo del momento total del fluido. Estas caracterizaciones del estado crítico como mínimo de la energía interna de cada capa y de la función de momento total se deben a Benton [14].

3.1.2. Flujo crítico para estratificaciones discretas confinadas. En esta sección estudiaremos un sistema como el presentado en la figura 3.2, formado

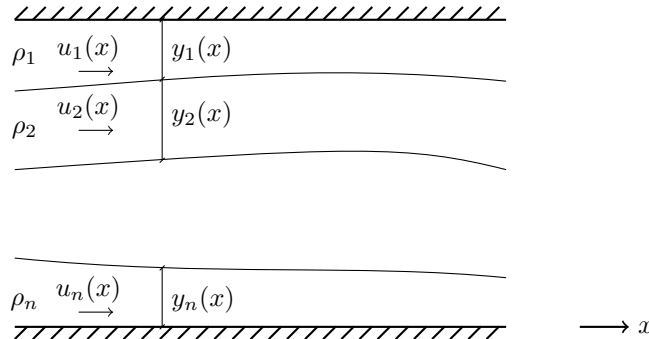


FIGURA 3.2. Flujo de n capas uniformes a confinadas por una tapa superior.

por n capas homogéneas, confinadas superiormente por una tapa rígida. Veremos

que en este caso el flujo crítico también puede ser caracterizado como un mínimo en la energía interna de cada capa, y en el momento total del sistema.

En este problema tenemos una variable adicional respecto al de la sección anterior: la presión en la pared superior, p_s . También tenemos una ecuación adicional, y es que la altura total del sistema $\sum_i y_i$ debe permanecer constante. Apliquemos una perturbación al sistema, y tomemos un referencial solidario a esta perturbación. Al igual que en el caso a superficie libre, la altura de alguna de las capas debe variar: $\partial y_j / \partial x \neq 0$ para algún j . La energía interna de cada capa en este caso es

$$E_i = \frac{q_i^2}{2gy_i^2} + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ji}y_j + \sum_{j=i}^n y_j + \frac{p_s}{\rho_i g}.$$

Imponiendo conservación de la energía interna en la capa i -ésima, junto a que la suma de los espesores de todas las capas debe permanecer constante, se obtiene

$$(3.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial E_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x} + \frac{\partial E_i}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x} = 0 \end{cases}.$$

El sistema (3.9) tiene que tener soluciones no triviales en $\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x}, \frac{\partial p_s}{\partial x}\right)$, por lo que su determinante debe ser nulo. Obtenemos así una condición para estado crítico:

$$\begin{vmatrix} 1 - F_1^2 & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{g\rho_1} \\ r_{12} & 1 - F_2^2 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{g\rho_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n} & \dots & 1 - F_n^2 & \frac{1}{g\rho_n} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Este determinante puede ser reducido a uno tridiagonal

$$(3.10) \quad \begin{vmatrix} F_2^2 + r_{12}F_1^2 + r_{12} - 1 & F_2^2 & \dots & 0 \\ r_{23}F_2^2 & F_3^2 + r_{23}F_2^2 + r_{23} - 1 & \dots & 0 \\ 0 & r_{34}F_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n^2 + r_{n-1n}F_{n-1}^2 + r_{n-1n} - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si llamamos c a la velocidad de la perturbación, la ecuación (3.10) se vuelve un polinomio de grado $2(n-1)$ en c . De esta forma, tenemos $n-1$ modos distintos.

Consideremos un estado del sistema (espesor de las capas y presión en la pared superior) cercano al crítico. Si aplicamos un desarrollo de Taylor para calcular la variación de energía interna de cualquiera de las capas, la primera ecuación de (3.9) indica que el término lineal se anula. Por lo tanto, tomando el término de segundo orden,

$$\Delta E_i = E_i(y_1, \dots, y_n, p_s) - E_i(y_1, \dots, y_n, p_s)_c = d^2 E_i(\Delta y_1, \dots, \Delta y_n, \Delta p_s).$$

Basta observar que $\frac{\partial^2 E_i}{\partial p_s^2} = 0$ y que $\frac{\partial^2 E_i}{\partial y_j \partial p_s} = 0$ para todo j , para tener asegurado que este diferencial segundo coincide con (3.6). Por lo tanto la energía interna de cada capa es mínima en un estado crítico.

Del mismo modo, se puede mostrar que el momento total también alcanza un mínimo en este estado. El momento en la capa i -ésima es

$$M_i = \frac{q_i^2}{gy_i} + \left(\frac{p_s}{\rho_i g} + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ji} y_j \right) y_i + \frac{y_i^2}{2},$$

y el mismo argumento que en el caso anterior conduce a la relación (3.8).

3.1.3. La hipótesis de tapa rígida. Long [38] observó en sus experimentos en un canal con dos capas homogéneas que la superficie libre del sistema permanecía prácticamente horizontal y conjeturó que, a los efectos del análisis de la dinámica interna del sistema, debería ser posible sustituir la superficie libre por una tapa rígida. Esta simplificación es conocida como la hipótesis de tapa rígida, y fue presentada en el capítulo 2. En virtud de lo expuesto en dicho capítulo, se desprende que esta hipótesis no altera la estabilidad del sistema, aunque sí elimina la presencia del modo externo en la dinámica del mismo. Esto permite que sea una simplificación habitual en los estudios de flujos estratificados, en los que suele hacerse foco en la dinámica interna.

Comparemos los flujos de n capas homogéneas de los casos presentados en las secciones 3.1.1 y 3.1.2, con la hipótesis adicional de que la variación relativa de densidades es pequeña en todo el sistema,

$$1 - r_{ij} \ll 1 \quad \forall i < j.$$

También supondremos que los números de Froude externos de todas las capas son pequeños,

$$F_i \ll 1 \quad \forall i.$$

Llamemos D_n al determinante para n capas con superficie libre y D'_n al correspondiente con tapa rígida. Desarrollando (3.5) respecto a su primera columna, se obtiene

$$D_n = F_1^2 D_{n-1} - D'_n + F_1^2 r_{12} D'_{n-1},$$

donde el subíndice $n-1$ corresponde al sistema obtenido al eliminar la capa número 1. Si se aplica esta fórmula recursivamente, se obtiene

$$D_n = -D'_n - F_1^2(1 - r_{12})D'_{n-1} - F_1^2 F_2^2(1 - r_{23})D'_{n-2} + \dots$$

El término de mayor orden de esta suma es el primero, de modo que

$$D_n \simeq -D'_n,$$

y las definiciones de estado crítico son equivalentes.

Así, si los números de Froude externos de todas las capas y las variaciones de densidades relativas son pequeñas, tenemos justificada -a los efectos de establecer los controles en el flujo- la hipótesis de tapa rígida. De este modo, podremos asumir que la superficie libre permanece horizontal.

De igual forma, si el flujo de un sistema de n capas es subcrítico respecto al modo externo, entonces se observa poca variación en el nivel de la superficie libre [19, 23], por lo que en este caso también se suele aplicar la hipótesis de tapa rígida.

3.1.4. Flujo crítico para dos capas homogéneas en un canal de ancho variable a superficie libre. A diferencia de lo que ocurre para el flujo de una única capa homogénea, la variación de ancho y del nivel del canal tienen efectos distintos: mientras la variación del ancho afecta en forma directa a todas las capas, la variación del nivel afecta solamente a la capa más densa. Analizaremos el flujo de dos capas a superficie libre; la extensión a mayor cantidad de capas es directa.

Consideremos un canal como el presentado en la figura 3.3, de nivel $h(x)$ y

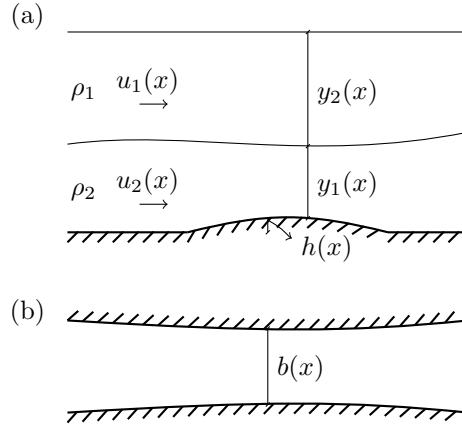


FIGURA 3.3. Flujo de dos capas uniformes en un canal con sección transversal variable: (a) vista lateral; (b) vista horizontal.

ancho $b(x)$ variables, por el que fluyen dos capas homogéneas en forma estacionaria. Aplicando la aproximación de aguas someras, tendremos en forma análoga a lo obtenido en la sección 1.9, que el sistema se encuentra gobernado por la ecuación

$$(3.11) \quad \mathbf{C} \mathbf{v}_x = \mathbf{D} \mathbf{f}_x,$$

donde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & g & g \\ 0 & u_2 & rg & g \\ y_1 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -g & 0 \\ -g & 0 \\ 0 & q_1 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} h \\ 1/b \end{pmatrix}, \quad r = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Observemos que la ecuación $\det(\mathbf{C}) = 0$ coincide con (3.4) tomando $n = 2$, por lo que podemos utilizarla como definición de estado crítico. Definamos un parámetro adimensionalizado que valga 1 siempre que este determinante se anule; tomamos el *número de Froude compuesto* G definido por

$$(3.12) \quad G^2 = 1 - \frac{\det(\mathbf{C})}{g^2 y_1 y_2 (1-r)} = \text{Fr}_1^2 + \text{Fr}_2^2 - (1-r) \text{Fr}_1^2 \text{Fr}_2^2,$$

donde $\text{Fr}_i = \frac{u_i}{(g' y_i)^{1/2}}$ son los *números de Froude internos* y $g' = (1-r)g$ es la *aceleración gravitatoria interna*.

Resolviendo (3.11) para \mathbf{v}_x en función de las variables del canal \mathbf{f}_x , obtenemos

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \frac{1}{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= - \left[\frac{1-(1+y_2/y_1)\text{Fr}_2^2}{1-G^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} + \left[\frac{-\text{Fr}_2^2}{1-G^2} \right] \frac{1}{y_1} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{1}{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} &= - \left[\frac{1-(1+ry_1/y_2)\text{Fr}_1^2}{1-G^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} + \left[\frac{1-\text{Fr}_1^2}{1-G^2} \right] \frac{1}{y_2} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{1}{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x} &= \left[\frac{G^2-(1+y_2/y_1)\text{Fr}_2^2}{1-G^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} - \left[\frac{-\text{Fr}_2^2}{1-G^2} \right] \frac{1}{y_1} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{1}{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x} &= \left[\frac{G^2-(1+ry_1/y_2)\text{Fr}_1^2}{1-G^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} - \left[\frac{1-\text{Fr}_1^2}{1-G^2} \right] \frac{1}{y_2} \frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned}$$

Observemos que si el flujo es crítico en una sección, entonces los denominadores en (3.13) se anulan. Las soluciones permanecen regulares sólo si los numeradores también se anulan. Tenemos así una condición necesaria para flujo crítico:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} - \left[1 - \left(1 + \frac{y_2}{y_1} \right) \text{Fr}_2^2 \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\text{Fr}_2^2}{y_1} \frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ - \left[1 - \left(1 + \frac{ry_1}{y_2} \right) \text{Fr}_1^2 \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{1-\text{Fr}_1^2}{y_2} \frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ G^2 = \text{Fr}_1^2 + \text{Fr}_2^2 - (1-r)\text{Fr}_1^2\text{Fr}_2^2 &= 1. \end{aligned}$$

Aquí solo dos de las tres ecuaciones son independientes.

En los problemas en que tanto el ancho como el fondo del canal varían, no sólo la geometría tiene por qué establecer la ubicación de los controles. Wood [52], considerando la extracción de dos capas desde un reservorio a través de una contracción horizontal, encontró que es necesaria la presencia de un control en la sección más angosta y otro aguas arriba. El nivel y la dinámica de la superficie libre está determinada por el control geométrico; en cambio, la dinámica de la interfase depende de la sección en la que el número de Froude interno era igual a 1. Este tipo de controles son llamados *virtuales*.

Sin embargo, en canales de ancho constante sólo son posibles los controles geométricos.

3.2. Controles hidráulicos en fluidos continuamente estratificados

Con excepción de algunos trabajos en casos puntuales, como los de Long [37, 39], las no linealidades intrínsecas en flujos continuamente estratificados generan dificultades adicionales respecto a los modelos en capas. El estudio de controles hidráulicos no escapa esta situación.

Según Baines [9], no es claro cuál de las varias posibles definiciones de número de Froude es la más adecuada para definir estado crítico en una estratificación arbitraria. Killworth [30], trabajando con flujos de fluidos continuamente estratificados en canales de sección rectangular con ancho y nivel variables, empleó la densidad como coordenada vertical y definió el número de Froude F mediante

$$F^2 = F^2(x, \rho) = \frac{-\rho u^2}{g(\Delta\rho)^2 \frac{\partial y}{\partial \rho}}, \quad \text{donde } \Delta\rho = \rho_{max} - \rho_{min}.$$

La elección de este parámetro se basa en reescalar los números de Froude para un sistema con n capas y tomar el límite con $n \rightarrow \infty$. En esta sección presentaremos brevemente algunos resultados de dicho artículo.

Mediante un argumento de regularidad de soluciones similar al presentado en la sección 3.1.4, se demuestra que si el fondo del canal permanece a altura constante, entonces un control solo se puede presentar en una sección en que

$$\frac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad \text{o} \quad \int_{\rho_{max}}^{\rho_{min}} \frac{\rho u r}{F^2} d\rho = 0,$$

donde $r(\rho)$ es una solución de una ecuación diferencial de segundo orden que involucra a las funciones de presión y de número de Froude. En cambio, si el canal tiene ancho constante, los controles solo pueden ocurrir en secciones en que $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$. Finalmente, si se permite que varíe tanto el fondo como el ancho del canal, de acuerdo a Killworth: “(...) *the requirement of control gives more complicated locations for the control points of the flow, and no simple deductions can be made.*”

Por otra parte, se obtiene una condición necesaria para que el flujo sea crítico en una sección, y es que exista una solución a la ecuación diferencial de segundo orden

$$(3.15) \quad \begin{cases} q_{\rho\rho} + \frac{q}{F^2(\Delta\rho)^2} = 0 \\ q_{\rho} = 0 \text{ en } \rho = \rho_{min} \end{cases} .$$

Como fue visto en la sección 1.10.2, varios trabajos presentaron modelos en capas discretas para explicar fenómenos de fluidos continuamente estratificados. Luego, es relevante preguntarse si estos modelos en capas son capaces de aproximar las condiciones de control de los modelos continuos. Mediante un esquema en diferencias finitas para la ecuación (3.15), se encuentran condiciones para control como (3.5) y (3.10), dependiendo de la presencia o no de una tapa rígida confinando superiormente al sistema. Así, tenemos que las condiciones de control para flujos en capas son versiones en diferencias finitas de las condiciones para estratificaciones continuas.

Si bien esto no resuelve la pregunta formulada al final del capítulo 1 acerca de cuántas capas son necesarias para modelar adecuadamente un flujo continuamente estratificado, sí valida enfoques como el de Farmer y Denton [23]. En base a sus mediciones de campo, establecieron que sólo dos modos internos participaban en el establecimiento de control, de modo que su modelo discreto consistió de tres capas. Esta simplificación no perjudica mayormente la ubicación del control.

3.3. El número de Froude compuesto para un sistema con dos capas

En un sistema de dos capas, tenemos definido el número de Froude compuesto G mediante la ecuación (3.12). Aquí marcaremos ciertas propiedades de este parámetro, y analizaremos el comportamiento de un cierto sistema formado por dos capas homogéneas a superficie libre en ciertos casos extremos.

Si bien el número de Froude compuesto no es un número de Froude en el sentido definido en el capítulo 1 (no es el cociente entre una velocidad convectiva y la celeridad de una onda larga), sí permite establecer la criticalidad del flujo: si $G < 1$, el flujo es internamente subcrítico, si $G = 1$ es internamente crítico, y si $G > 1$ es internamente supercrítico [33]. De todas formas, el hecho de que $G = 1$ no indica respecto a qué modo el flujo es crítico [19].

En esta sección consideraremos que la diferencia de densidades relativa entre los fluidos es muy pequeña, por lo que podemos utilizar la aproximación de Boussinesq $1 - r \ll 1$. En dicho caso, la tercer condición para regularidad en (3.14) puede ser reducida a

$$(3.16) \quad G^2 = Fr_1^2 + Fr_2^2 = 1.$$

Si el número de Froude interno de una de las capas es pequeño ($Fr_i^2 \ll 1$ para algún i), entonces las ecuaciones (3.13) pueden ser reducidas a las correspondientes a una única capa (1.23), con el número de Froude interno sustituyendo al número de Froude presentado en el capítulo 1. Si la capa inferior es la que tiene un número

de Froude no despreciable entonces responderá a cambios tanto en el ancho como en el piso del canal, independientemente de lo que ocurra con la capa superior. En cambio, si es la capa superior la que tiene número de Froude no despreciable, entonces sólo responderá a variaciones en el ancho, pero no a cambios en el fondo del canal ni en el espesor o velocidad de la capa inferior.

Por otra parte, si los dos números de Froude internos son altos ($\text{Fr}_i^2 \gg 1$), entonces aplicando la condición (2.24) para tener asegurada la estabilidad del sistema, es necesario que

$$u_1 \approx u \approx u_2.$$

En este caso, si definimos el número de Froude externo $F = \frac{u}{g(y_1+y_2)}$, las ecuaciones (3.13) se reducen a

$$(3.17) \quad \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} = - \left[\frac{1}{1-F^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} + \left[\frac{1}{1-F^2} \right] \frac{1}{y_1+y_2} \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$(3.18) \quad \frac{1}{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x} = \left[\frac{F^2}{1-F^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} - \left[\frac{1}{1-F^2} \right] \frac{1}{y_1+y_2} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad i = 1, 2.$$

Sumando las dos ecuaciones en (3.18), tenemos

$$(3.19) \quad \frac{1}{(y_1+y_2)} \frac{\partial(y_1+y_2)}{\partial x} = \left[\frac{F^2}{1-F^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} - \left[\frac{1}{1-F^2} \right] \frac{1}{y_1+y_2} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Luego, las ecuaciones (3.17) y (3.19) son análogas a las obtenidas para un canal con una única capa, con tirante y_1+y_2 y velocidad u . El flujo de dos capas se comporta como el de un fluido homogéneo. La dinámica interna carece de importancia para determinar el nivel de la superficie libre.

Finalmente, si ambos números de Froude internos son $\text{Fr}_i = \mathcal{O}(1)$, entonces no podemos realizar mayores simplificaciones a (3.13): la dinámica de una capa dependerá de la otra. En este caso, diremos que las capas se encuentran *acopladas*.

3.4. Plano de números de Froude para flujos de dos capas

En esta sección presentaremos un enfoque introducido en [2] para el análisis de flujos de dos capas homogéneas en un canal de nivel y ancho variables, como el de la figura 3.3. Se considera un plano de números de Froude internos ($\text{Fr}_1^2, \text{Fr}_2^2$) para representar las soluciones. Tomando la aproximación de Boussinesq $1-r \ll 1$, la condición para flujo crítico (3.16) se reduce a una recta en este plano, $\text{Fr}_1^2 + \text{Fr}_2^2 = 1$.

Consideremos fijos los caudales de cada capa, $Q_i = bu_i y_i$, y llamemos q_r al cociente de caudales, $q_r = Q_1/Q_2$. Como referencia para adimensionalizar tomamos el ancho b_0 y la altura de la superficie libre en alguna sección, $(y_1+y_2)_0$:

$$Q_i^* = \frac{Q_i}{g^{1/2} b_0 (y_1+y_2)_0^{3/2}}, \quad b^* = \frac{b}{b_0}, \quad h^* = \frac{h}{(y_1+y_2)_0}, \quad y^* = \frac{y}{(y_1+y_2)_0}.$$

Asumiremos que los dos números de Froude externos F_i son pequeños, de modo que podamos utilizar la hipótesis de tapa rígida. Como los números de Froude interno y externo se relacionan mediante $F_i^2 = (1-r)\text{Fr}_i^2$, si alguno de los números de Froude externos no fuera pequeño, podríamos aplicar alguna de las simplificaciones expuestas en la sección anterior. La ecuación adimensionalizada para la superficie libre del sistema es

$$(3.20) \quad y_1^* + y_2^* + h^* = 1.$$

Podemos escribir la altura de cada capa en forma dimensionalizada y adimensionalizada como

$$(3.21) \quad y_i^* = \left[\frac{Q_i^*}{b^* \text{Fr}_i} \right]^{2/3}, \quad y_i = \left[\frac{Q_i}{bg^{1/2} \text{Fr}_i} \right]^{2/3}.$$

Así, la ecuación de superficie libre es

$$(3.22) \quad q_r^{2/3} \text{Fr}_1^{-2/3} + \text{Fr}_2^{-2/3} = \left[\frac{Q_2^*}{b^*(1-h^*)^{3/2}} \right]^{-2/3}.$$

La ecuación anterior define los posibles números de Froude internos de las capas, fijados q_r y $Q_2^*/b^*(1-h^*)^{3/2}$. Esto nos brinda una grilla de fondo en el plano de números de Froude: conocidos Q_1 , Q_2 y la geometría del canal, tenemos determinados dichos parámetros en todas las secciones. Por simplicidad, trabajaremos por separado con flujos en canales en los que sólo varía el ancho o sólo el fondo.

Despreciaremos la disipación de energía por fricción o por la formación de resaltos internos, así como tampoco tendremos en cuenta la mezcla entre las capas. Estos dos últimos fenómenos serán considerados más adelante. Si bien en las ecuaciones no intervienen los signos de las velocidades, en principio asumiremos que ambos fluidos se desplazan con igual sentido. De esta forma podremos utilizar sin ambigüedad expresiones como “aguas arriba” o “aguas abajo”.

Nos concentraremos en flujos controlados; los flujos sin controles son o bien internamente subcríticos o bien internamente supercríticos a lo largo del canal. Estos casos simples serán tenidos en cuenta al presentar la clasificación de flujos de dos capas sobre topografía.

3.4.1. Flujos a través de contracciones. Aquí podemos suponer $h^* = 0$. Consideremos la carga hidráulica de cada una de las capas,

$$H_1 = \rho_1 \frac{u_1^2}{2} + \rho_1 g(y_1 + y_2) + p_0,$$

$$H_2 = \rho_2 \frac{u_2^2}{2} + \rho_1 g y_1 + \rho_2 g y_2 + p_0,$$

donde p_0 es la presión en la superficie libre. Como no tenemos en cuenta la disipación de energía en el canal, estas cargas permanecen constantes. Su diferencia adimensionalizada

$$\frac{H_2 - H_1}{g' \rho_2 (y_1 + y_2)_0} = y_2^* \left(1 + \frac{1}{2} \text{Fr}_2^2 \right) - y_1^* \frac{1}{2} r \text{Fr}_1^2.$$

deberá permanecer constante. Asumiendo que $1 - r \ll 1$ y utilizando (3.21), podemos simplificar la ecuación anterior

$$(3.23) \quad \frac{H_2 - H_1}{g' \rho_2 (y_1 + y_2)_0} = \frac{\text{Fr}_2^{-2/3} \left(1 + \frac{1}{2} \text{Fr}_2^2 \right) - \frac{1}{2} q_r^{2/3} \text{Fr}_1^{4/3}}{q_r^{2/3} \text{Fr}_1^{-2/3} + \text{Fr}_2^{-2/3}}.$$

Si tenemos un reservorio para la capa inferior y llamamos Y_2 a la profundidad de esta capa en este reservorio, entonces

$$(3.24) \quad \frac{H_2 - H_1}{g' \rho_2 (y_1 + y_2)_0} = \frac{Y_2}{(y_1 + y_2)_0} = Y_2^*.$$

Si conocemos Y_2 , entonces (3.23) y (3.24) definen una curva en el plano $(\text{Fr}_1^2, \text{Fr}_2^2)$, a la que llamaremos *curva solución*. El estado del flujo en cualquier punto del

canal está dado por la intersección de la curva solución con la correspondiente *curva de conservación de masa* (3.22). Si se tienen determinados los números de Froude en alguna sección -como en un control- entonces tendremos completamente determinado el flujo a lo largo de la curva solución. En la figura 3.4 se presentan familias de estas curvas para $q_r = 1$, junto con la recta de flujo crítico $Fr_1^2 + Fr_2^2 = 1$.

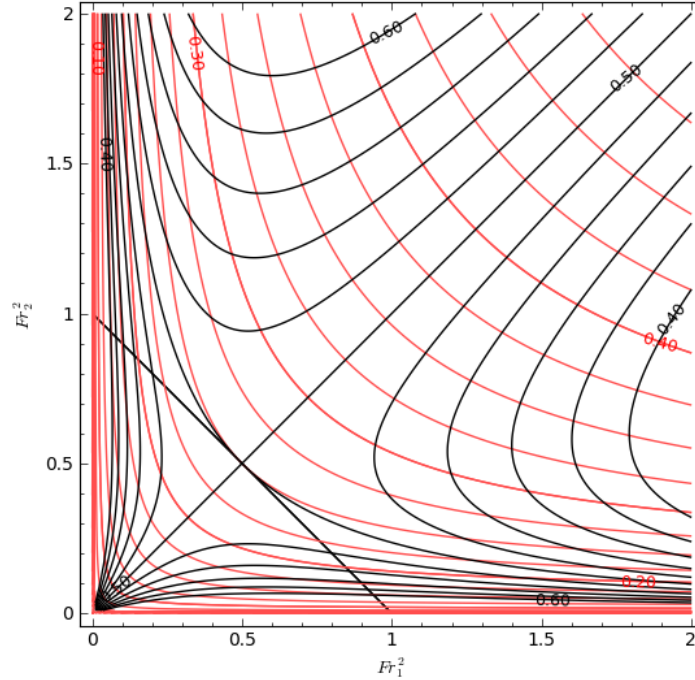


FIGURA 3.4. Plano de Froude para flujos a través de contracciones, para $q_r = 1$. En rojo, las curvas de conservación de masa, etiquetadas con el valor de Q_2^*/b^* . En negro, las curvas solución, etiquetadas con el valor de Y_2^* .

Analicemos la criticalidad interna del fluido, intersectando la recta (3.16) con las curvas de conservación de masa. Se tiene que si Q_2^*/b^* es menor que un cierto valor,

$$(3.25) \quad \left(\frac{Q_2^*}{b^*}\right)_c = \frac{1}{[1 + q_r^{1/2}]^2},$$

la curva de conservación de masa intersecta dos veces la condición de criticalidad. Luego, para valores de Q_2^*/b^* menores al dado por (3.25) tenemos dos soluciones controladas distintas. También tendremos una cantidad infinita de otras soluciones no controladas por la contracción. Un ejemplo experimental de dos flujos distintos controlados en la sección más angosta del canal, con todos los parámetros iguales entre sí, puede ser encontrado en [2]. La diferencia entre estos dos flujos radica en las condiciones que deben satisfacerse aguas abajo en el canal.

Por otra parte, si Q_2^*/b^* es mayor que (3.25), el control deberá producirse en una sección más ancha, y por lo tanto con mayor b^* . Tendremos así un control virtual, que ocurrirá en una sección en que $\frac{\partial b}{\partial x} \neq 0$. Así, las condiciones de regularidad (3.14) se reducen a

$$(3.26) \quad \begin{aligned} 1 - \left(1 + \frac{y_2}{y_1}\right) \text{Fr}_2^2 &= 0, \\ 1 - \left(1 + \frac{ry_1}{y_2}\right) \text{Fr}_1^2 &= 0, \\ G^2 = \text{Fr}_1^2 + \text{Fr}_2^2 &= 1. \end{aligned}$$

Resolviendo (3.26) y utilizando que la diferencia de densidades relativa es despreciable, obtenemos

$$(3.27) \quad \frac{\text{Fr}_2^2}{\text{Fr}_1^2} = \frac{y_1}{y_2} = q_r.$$

De este modo, los números de Froude en el control virtual deben ser

$$\text{Fr}_1^2 = \frac{1}{1 + q_r}, \quad \text{Fr}_2^2 = \frac{q_r}{1 + q_r},$$

y el caudal por unidad de ancho adimensionalizado de la capa inferior es

$$\frac{Q_2^*}{b^*} = \frac{q_r^{1/2}}{(1 + q_r)^2}.$$

Es directo verificar que este último valor es siempre menor o igual al dado por (3.25), con la igualdad alcanzándose sólo si $q_r = 1$.

Armi [2] presentó resultados experimentales para dos flujos con controles virtuales aguas arriba de la sección de mayor contracción. A pesar de tener los mismos parámetros experimentales (caudales de ambas capas), cambiando las condiciones de descarga aguas abajo en el canal se logró que los flujos tomaran distintos caminos supercríticos en el plano de números de Froude.

La altura adimensionalizada de la interfase en función del ancho en los controles hidráulicos puede ser encontrada de la siguiente forma: para Q_2^*/b^* menor que el valor dado por (3.25), utilizando la ecuación para la superficie libre (3.20) junto a la condición de criticalidad interna (3.16), se obtiene

$$q_r^2 \left(\frac{Q_2^*}{b^*}\right)^2 = (1 - y_2^*)^3 \left(1 - \left(\frac{Q_2^*}{b^*}\right)^2 y_2^{*-3}\right).$$

Si Q_2^*/b^* es mayor que el dado por (3.25), entonces utilizando la relación (3.27) junto a (3.20), se obtiene

$$y_2^* = \frac{1}{1 + q_r}.$$

Por otra parte, si se asume que sólo una de las capas es *activa*, podemos asumir que el número de Froude de la capa pasiva es pequeño, de modo que

$$y_i^* = \left(\frac{Q^*}{b^*}\right)^{2/3}.$$

En la figura 3.5 se comparan algunos resultados experimentales de [2] con estas curvas teóricas. Observemos que para Q_2^*/b^* menores a aproximadamente el 70% del valor para el que los flujos pueden estar controlados en la sección de mayor contracción, la aproximación por una única capa activa predice relativamente bien la posición de la interfase en esta sección. Esto permite simplificar más aún el

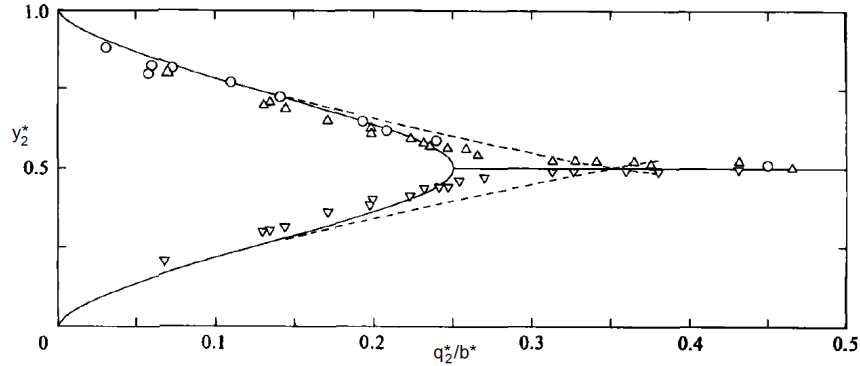


FIGURA 3.5. Altura adimensionalizada de la interfase en la sección de mayor contracción en función del caudal adimensionalizado por unidad de ancho, para $q_r = 1$. Las curvas sólidas corresponden a las soluciones controladas. Las curvas discontinuas representan las alturas estimadas suponiendo una única capa activa. Los símbolos representan los resultados experimentales: (Δ) con un rebosadero aguas abajo; (∇) con un obstáculo por encima aguas abajo; (\circ) medido aguas arriba del rebosadero en una sección con el mismo nivel que el canal. Tomado de Armi [2].

análisis, como fue explicado en la sección 3.3. Las condiciones aguas abajo en el canal permiten determinar cuál es la capa activa.

3.4.2. Flujos sobre topografía. Consideremos que el ancho del canal es constante, de forma que $b^* = 1$. Las cargas de las capas son supuestas constantes, y valen

$$H_1 = \rho_1 \frac{u_1^2}{2} + \rho_1 g(y_1 + y_2 + h) + p_0,$$

$$H_2 = \rho_2 \frac{u_2^2}{2} + \rho_1 g y_1 + \rho_2 g(y_2 + h) + p_0.$$

En forma adimensionalizada, su diferencia es

$$(3.28) \quad \frac{H_2 - H_1}{g' \rho_2 (y_1 + y_2)_0} = \frac{1}{2} r y_1^* \text{Fr}_1^2 - \frac{1}{2} y_2^* \text{Fr}_2^2 - (y_2^* + h^*).$$

Si despreciamos la variación de densidades relativa y empleamos la ecuación de nivel de la superficie libre (3.20), tenemos

$$(3.29) \quad \frac{H_2 - H_1}{g' \rho_2 (y_1 + y_2)_0} + 1 = y_1^* \left(\frac{1}{2} \text{Fr}_1^2 + 1 \right) - \frac{1}{2} y_2^* \text{Fr}_2^2.$$

Es conveniente utilizar la igualdad anterior para definir la profundidad adimensionalizada de la capa superior en un reservorio cuando los números de Froude internos se aproximan a 0, esto es:

$$Y_1^* = \frac{H_2 - H_1}{g' \rho_2 (y_1 + y_2)_0} + 1.$$

Combinando (3.29) con (3.22) obtenemos las ecuaciones de las *curvas solución* para el flujo sobre topografía,

$$(3.30) \quad Fr_2^2 = q_r \left[2Fr_1^{-2/3} + Fr_1^{4/3} - 2Y_1^* Q_1^{*-2/3} \right]^{3/2}.$$

Las curvas solución, junto a las de conservación de masa y la recta de estado crítico, se presentan en la figura 3.6. Allí se puede observar una diferencia respecto a los flujos a través de contracciones: si aguas arriba del obstáculo el flujo es internamente

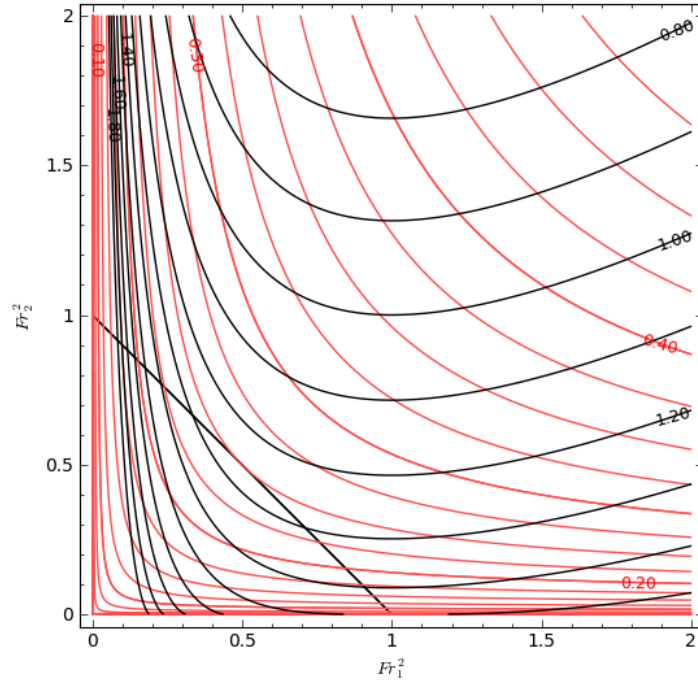


FIGURA 3.6. Plano de Froude para flujos sobre topografía, para $q_r = 1$. En rojo, las curvas de conservación de masa, etiquetadas con el valor de $Q_2^*/(1 - h^*)^{3/2}$. En negro, las curvas solución, etiquetadas con el valor de $Y_1^* q_1^{*-2/3}$.

subcrítico, entonces la única capa que puede aumentar su número de Froude al aumentar h^* (y consiguientemente aumentar $Q_2^*/(1 - h^*)^{3/2}$) es la capa inferior. Observemos que aquí la condición necesaria de criticalidad (3.14) se reduce a

$$(3.31) \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0;$$

a diferencia de los flujos a través de contracciones, aquí solo son posibles los controles dados por la geometría del canal.

En forma análoga a lo que ocurre en flujos a través de contracciones, se tiene que si el parámetro $Q_2^*/(1 - h^*)^{3/2}$ excede un cierto valor, entonces el flujo permanece

internamente supercrítico. Dicho valor límite es

$$\frac{Q_2^*}{(1 - h^*)^{3/2}} = \frac{1}{\left[1 + q_r^{1/2}\right]^2}.$$

3.4.3. Otras aplicaciones del plano de números de Froude: algunas limitaciones y alternativas. Armi y Farmer [3] trabajaron con flujos de intercambio (velocidades con sentido opuesto) en canales en los que solamente varía el ancho, y luego a canales combinando un obstáculo en la topografía y una contracción [22]. Allí se prueba que para que exista intercambio maximal son necesarios dos controles. Se tiene que si la componente barotrópica $U_0 = |(u_1 y_1)_0 + (u_2 y_2)_0|$ es suficientemente grande, entonces se observa un comportamiento con una única capa activa.

Esta simplificación fue utilizada como punto de partida en el análisis del comportamiento de un fluido continuamente estratificado sobre topografía [4]. Como respuesta a un obstáculo, estos flujos suelen formar ciertas capas de densidad constante aguas abajo del mismo, con la capa superior permaneciendo en reposo [46]. Un fenómeno similar es observado en flujos continuamente estratificados a través de una contracción, con un reservorio aguas arriba [5].

La extensión del enfoque del plano de números de Froude para flujos con mayor cantidad de capas es simple, aunque su representación gráfica se vuelve dificultosa. Posteriormente se presentarán las ecuaciones para tres capas, y se comparará con otros enfoques.

Por otra parte, a pesar de la simple representación que provee el plano de números de Froude para flujos de dos capas, su aplicación a canales con geometrías más complejas (secciones de ancho y alto variables, secciones no rectangulares) resulta difícil. En este sentido, Dalziel [17] extendió el enfoque del funcional hidráulico introducido por Gill [25] a flujos de intercambio entre dos reservorios de densidades distintas. La idea allí es formular las posibles configuraciones de la interfase como soluciones a

$$(3.32) \quad J(a_0, \dots, a_n, Q, \bar{q}, \mathcal{G}; h) = 0,$$

donde

- a_i son parámetros geométricos,
- $Q = |Q_1| - |Q_2|$ es el flujo barotrópico neto,
- $\bar{q} = |Q_1| + |Q_2|$ es el flujo de intercambio,
- \mathcal{G} es una constante,
- h es el espesor de la capa inferior.

Considerando Q como dato, \bar{q} y \mathcal{G} permiten seleccionar entre los flujos posibles; para ciertos valores de a_0, \dots, a_n pueden existir varias h que resuelven (3.32). Los controles hidráulicos aquí se corresponden con la transición de una rama a otra de soluciones en h de dicha ecuación.

Este enfoque permite extender el trabajo de [3, 22] a canales con cualquier sección transversal. De todos modos, el procedimiento para obtener soluciones en geometrías más complejas es complicado (ver, por ejemplo, los resultados teóricos de [18] para flujos de intercambio a través de puertas). El funcional hidráulico de Gill también fue extendido a flujos de intercambio controlados con tres capas y

aplicado al estrecho de Bab el Mandab [45], y posteriormente para múltiples capas [32].

3.5. Resaltos internos

Los resaltos en la interfase entre dos fluidos homogéneos han sido estudiados analítica y experimentalmente por más de cincuenta años [38, 54]. A diferencia de lo que ocurre en una única capa a superficie libre, aquí los efectos de arrastre y mezcla en el resalto pueden afectar significativamente a las condiciones aguas abajo del mismo.

Cuando los cambios en las alturas de los fluidos a través del resalto son pequeños, tanto el cortante entre las capas como la pendiente de la interfase son suficientemente pequeños como para despreciar el arrastre y la mezcla [53]. Nos referiremos a éstos como *resaltos internos débiles*. En cambio, si el resalto es pronunciado, en la interfase pueden ser observadas inestabilidades; se produce mezcla entre los fluidos, que afecta a las condiciones aguas abajo.

Aquí nos centraremos en saltos en flujos estacionarios entre dos capas homogéneas. Su [48] estudió numéricamente resaltos en un sistema con n capas, en base a las mismas hipótesis que formulamos aquí. En sus simulaciones obtuvo que los resaltos internos para cada modo sólo son posibles en un determinado rango de parámetros, y que el intervalo en que es posible el salto respecto a un determinado modo aumenta al aumentar la estratificación del fluido.

Como trabajaremos con resaltos internos, asumiremos que tenemos un sistema formado por dos capas, de alto constante (vale la hipótesis de tapa rígida) y ancho constante, como en la figura 3.7. Utilizaremos los subíndices u y d para referirnos

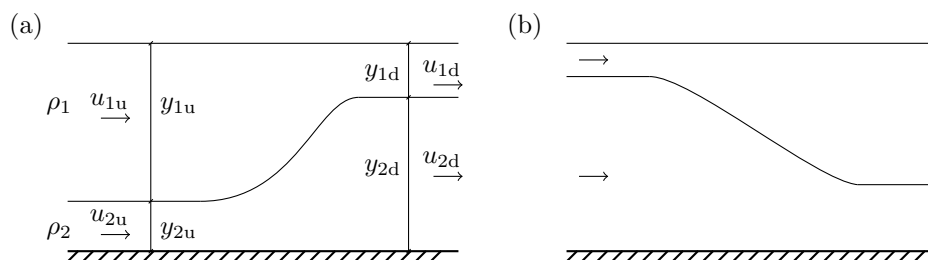


FIGURA 3.7. Flujo de dos capas con saltos hidráulicos. (a) Resalto hidráulico; (b) Caída hidráulica.

a las variables aguas arriba y aguas abajo del salto, respectivamente. Los resaltos asociados con el modo externo son posibles si el número de Froude externo de alguna de las capas es suficientemente alto [48]. Trataremos solamente el caso en que la capa inferior aumenta su altura, llamado simplemente *resalto hidráulico*. Para saltos débiles, el caso en que la capa superior aumenta su altura, fenómeno denominado *caída hidráulica*, puede ser tratado de la misma forma.

En primer lugar nos centraremos en resaltos débiles, para los que -conocido el estado del flujo aguas arriba de ellos- podemos predecir el estado del flujo aguas abajo con las hipótesis que hemos realizado hasta ahora. Luego presentaremos algunos resultados teóricos en caso de que sea posible la mezcla entre las capas, asumiendo un modelo de “una capa y media”: la menos densa tiene gran altura, y

velocidad mucho menor que la más densa. Aquí tenemos cotas para la variación de las magnitudes de la capa activa a través del salto.

3.5.1. Resaltos internos débiles. Como fue comentado previamente, si suponemos que un resalto es pequeño podemos despreciar la mezcla entre las capas y el arrastre. Si queremos aplicar la conservación de momento a cada capa, tenemos una incógnita adicional, que es la distribución de presiones en el resalto. Yih y Guha [54] asumieron que las presiones son hidrostáticas, y que la altura media en el salto es $(y_{2u} + y_{2d})/2$. Aplicando conservación de momento a la capa de abajo, y llamando q_i al caudal por unidad de ancho de la capa i -ésima, tenemos

$$(3.33) \quad \rho_2 q_2 \frac{1}{y_2} \Big|_u^d = - \left(\rho_1 g y_1 y_2 + \frac{\rho_2 g y_2^2}{2} \right) \Big|_u^d + \rho_1 g \left(\frac{y_{1u} + y_{1d}}{2} \right) (y_{2u} - y_{2d}),$$

donde el símbolo $\Big|_u^d$ representa la diferencia de la magnitud entre aguas abajo y aguas arriba del salto. La conservación de momento para la capa de arriba se puede expresar como

$$(3.34) \quad \rho_1 q_1 \frac{1}{y_1} \Big|_u^d = - \rho_1 g y_1^2 \Big|_u^d + \rho_1 g \left(\frac{y_{1u} + y_{1d}}{2} \right) (y_{2u} - y_{2d}).$$

Fijados los q_i y conocido el estado aguas arriba del resalto, se pueden emplear las ecuaciones (3.33) y (3.34) para determinar las alturas conjugadas. En [54], se utilizó esto para probar que si los números de Froude externos de una de las capas es alto, entonces existe un único estado conjugado, y que en general, no pueden existir más de tres.

La pérdida de energía total en el salto está dada por [48]

$$(3.35) \quad \Delta E = E_1 + E_2 \Big|_u^d = \frac{\rho_2}{2} \left(\frac{r y_{1u} u_{1u}^3 (y_{1d} - y_{1u})^3}{y_{1d}^2 (y_{1d} + y_{1u})} - \frac{y_{2u} u_{2u}^3 (y_{2d} - y_{2u})^3}{y_{2d}^2 (y_{2d} + y_{2u})} \right).$$

Otro enfoque empleado en el estudio de saltos débiles consiste en suponer que las pérdidas de energía en la capa que se contrae en el salto interno son de un orden de magnitud menor que las que ocurren en la capa que se expande. Para resaltos débiles, esta hipótesis y la de Yih y Guha dan resultados similares [53].

Por otra parte, Armi [2] propuso un tratamiento bastante más simple de los resaltos débiles, basado en el plano de Froude. Para una capa homogénea, utilizando la ecuación para pérdida de carga y la relación entre alturas conjugadas presentadas en el capítulo 1,

$$\frac{\Delta H}{g y_0} \approx \frac{2}{27} (1 - F_0^2)^3,$$

donde F_0 e y_0 denotan el número de Froude y el tirante aguas arriba del resalto¹. Así, la variación de nivel del reservorio debido a un pequeño salto es aproximadamente

$$\frac{\Delta Y}{Y} \approx \frac{1}{20} (1 - F_0^2)^3.$$

En un resalto hidráulico interno vale una relación similar, con el número de Froude compuesto reemplazando al de una única capa:

$$(3.36) \quad \frac{\Delta Y_i}{Y_i} \approx \frac{1}{20} (1 - G_0^2)^3.$$

¹La condición de salto débil aquí nos permite tomar $F_0^2 - 1 \ll 1$.

Observemos que si $G_0^2 < 3/2$, entonces $\left| \frac{\Delta Y_i}{Y_i} \right| < \frac{1}{160}$, de forma que es posible suponer que se conserva la energía. Para $G_0^2 > 3/2$, se puede utilizar (3.36) para predecir a qué curva solución cambia el flujo. El estado conjugado queda únicamente determinado.

3.5.2. Mezcla para una capa y media. Aquí presentaremos un modelo simple para resaltos hidráulicos con arrastre y mezcla, introducido en [27]. Supongamos que tenemos un salto como en la figura 3.8, y que además la capa superior

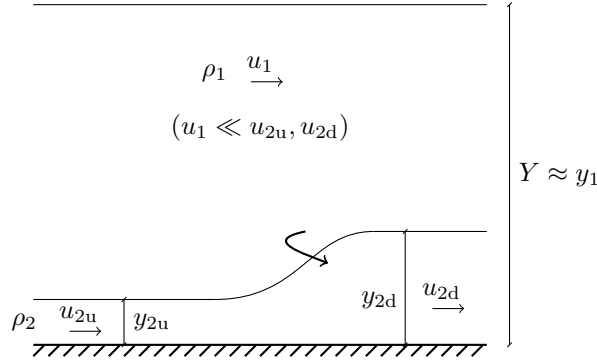


FIGURA 3.8. Salto con entrada del fluido más liviano en el flujo de una capa y media.

tiene mucho mayor altura y menor velocidad que la inferior. Asumiremos que la diferencia de densidades entre los fluidos es pequeña, y que toda la mezcla se debe a la entrada del fluido más liviano en el más denso. Esto implica que la densidad puede variar en la capa inferior.

Tenemos tres principios físicos que podemos utilizar: conservación de volumen, masa y momento total a través del salto. Tenemos así

$$(3.37) \quad u_1 y_1 + u_2 y_2 \Big|_u^d = 0,$$

$$(3.38) \quad \rho_1 y_1 u_1 + \rho_2 y_2 u_2 \Big|_u^d = 0,$$

$$(3.39) \quad \rho_1 y_1 u_1^2 + \rho_2 y_2 u_2^2 + \frac{(\rho_2 - \rho_1) g y_2^2}{2} \Big|_u^d = 0.$$

Las ecuaciones (3.37) y (3.38) pueden ser combinadas para dar

$$(3.40) \quad (\rho_2 - \rho_1) y_2 u_2 \Big|_u^d = 0.$$

Si integramos (3.37), tenemos $u_1 y_1 + u_2 y_2 = Q$. Los dos primeros términos en (3.39) son $\rho_1 u_1 Q$ y $\rho_2 u_2 Q$; como estamos suponiendo $|u_1| \ll |u_{2d}|, |u_{2u}|$, el primer sumando en esta ecuación puede ser despreciado. Más aún, utilizamos la aproximación de Boussinesq para escribir $\rho_2 = r \rho_1$, con $r \approx 1$, y obtenemos una ecuación de conservación de momento simplificada:

$$(3.41) \quad y_2 u_2^2 - (1 - r) g y_2^2 \Big|_u^d = 0,$$

donde el número r puede variar a lo largo del salto. Si lo supusiéramos constante estaríamos despreciando la mezcla, y llegaríamos a los mismos resultados que los modelos para resaltos débiles. Si queremos incorporar los efectos de mezcla, necesitamos una ecuación adicional para obtener clausura. En [27] se propuso una *densidad de energía interna* e , que incorpora todas las formas de energía no tenidas en cuenta por el flujo medio, y que satisface

$$(3.42) \quad \frac{y_2 u_2^3}{2} + (1-r)gy_2^2 u_2 + y_2 u_2 e \Big|_u^d = 0.$$

Esta densidad de energía interna e es asumida como casi exclusivamente turbulenta, y se realiza una clausura parcial:

$$(3.43) \quad 0 \leq e \leq \frac{d}{4}(1-r)gy_2,$$

donde d es el número de dimensiones en los que se particiona la turbulencia.

Combinando las igualdades (3.38), (3.41), (3.42) con la desigualdad (3.43), se pueden obtener cotas para las variaciones de altura, velocidad y flotabilidad $(\rho_{2d} - \rho_1)/(\rho_{2u} - \rho_1)$ de la capa activa [27]. En el cuadro 3.1 se presentan los resultados de dicho trabajo. En particular, las cotas inferiores para la variación de

		$\frac{\rho_{2d}-\rho_1}{\rho_{2u}-\rho_1}$	$\frac{u_{2d}}{u_{2u}}$	$\frac{y_{2d}}{y_{2u}}$	$(Fr_2)_d$	$(Fr_2)_u$
Cota inferior para $(\rho_{2d} - \rho_1)/(\rho_{2u} - \rho_1)$	$d = 2$	0.588	0.358	4.738	3.953	0.848
	$d = 3$	0.508	0.298	6.589	5.054	0.824
Cota inferior para u_{2d}/u_{2u}	$d = 2$	1	0.229	4.365	3.422	0.375
	$d = 3$	1	0.182	5.486	4.218	0.328
Cota superior para y_{2d}/y_{2u}	$d = 2$	0.654	0.274	5.572	4.082	0.585
	$d = 3$	0.567	0.226	7.772	5.279	0.567

CUADRO 3.1. Cotas para las variaciones relativas de $\rho_2 - \rho_1$, u_2 , e y_2 a través del salto. Los valores en negrita son los obtenidos en base a la clausura parcial; los restantes de cada fila son el valor de las restantes variables cuando se alcanzan las cotas en negrita. Se incluyen también los valores del número de Froude interno de la capa inferior aguas abajo y arriba del resalto. Tomado de [27].

flotabilidad indican la cantidad máxima de mezcla que puede ocurrir.

3.6. Clasificación del flujo de dos capas sobre topografía

Aquí presentaremos una clasificación del flujo estacionario de dos capas homogéneas en un canal de ancho constante con un obstáculo. Al igual que para la clasificación de flujos homogéneos presentada en el capítulo 1, existen dos líneas de trabajo experimentales, que conducen a ciertas diferencias en los esquemas. Por un lado, tenemos los experimentos con obstáculos fijos de Lawrence y esquemas de clasificación basados en curvas de energía interna en función de la posición de la interfase [35]. Por otra parte, Baines [7, 9] trabajó con fluidos inicialmente en reposo en un canal, y el obstáculo era acelerado desde el reposo hasta una velocidad constante.

Analizaremos la clasificación introducida por Lawrence, y luego la compararemos con la propuesta por Baines. Para comparar estos esquemas de clasificación, en

los experimentos con obstáculo fijo se aseguró que, sin el mismo, las dos capas tuvieran la misma velocidad. Las variables referidas a la capa superior serán denotadas por el subíndice 1 y las referidas a la inferior tendrán el subíndice 2. Denotaremos y_{10} e y_{20} a las alturas de las capas en este estado inicial, y llamaremos r al cociente de densidades. Los caudales por unidad de ancho q_1 y q_2 permanecen fijos a lo largo del experimento.

Las hipótesis sobre el flujo para establecer esta clasificación son esencialmente las mismas que las que hemos realizado en este trabajo: que los fluidos son perfectos e inmiscibles, con flujo unidireccional; que valen las hipótesis de aguas someras y la aproximación de Boussinesq $1 - r \ll 1$; y que los números de Froude externos de las capas son $F_i = \mathcal{O}(1)$. En virtud de (3.31), los controles hidráulicos sólo pueden producirse en la cima del obstáculo o en una región plana del canal.

Sea Y la altura total del sistema, $Y = y_1 + y_2 + h$. Utilizando las hipótesis realizadas, se cumple $Y = y_{10} + y_{20}$. Sea k el caudal relativo de la capa superior,

$$k = \frac{q_2}{q_1 + q_2} = \frac{y_{20}}{Y}.$$

Utilizaremos Y para adimensionalizar las longitudes: consideremos $\chi = x/Y$ la distancia horizontal, $\beta = h/Y$ la altura del obstáculo, y $\eta = (h + y_2 + y_{20})/Y$ la desviación de la interfase respecto al estado original. Con estas nuevas variables, podemos aplicar la ecuación (3.13) para determinar la variación de la interfase:

$$(3.44) \quad \frac{\partial \eta}{\partial \chi} = \frac{-\text{Fr}_2^2}{1 - G^2} \frac{\partial \beta}{\partial \chi}.$$

Definamos la energía interna del sistema como la diferencia entre las cargas hidráulicas adimensionalizada (3.28), con un término de corrección:

$$(3.45) \quad E = \frac{H_2 - H_1}{g'Y\rho_2} - k.$$

El término k es colocado en la definición para que en caso de que $u_1 = u_2$ se cumpla $E = 0$, de forma que la energía interna se vuelve una medida de la desviación del flujo respecto al estado original [35].

Aplicando las expresiones (3.13) para y_1 e y_2 , junto con las aproximaciones de tapa rígida y de Boussinesq, se tiene:

$$(3.46) \quad E = \eta + \frac{1}{2}k(1-k)G_0^2 \left(\left[\frac{k}{k + \eta - \beta} \right]^2 - \left[\frac{1-k}{1-k-\eta} \right]^2 \right),$$

donde G_0^2 es el número de Froude compuesto del estado inicial, que puede ser escrito como

$$G_0^2 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{g'k(1-k)Y^3}.$$

Por otra parte, la energía interna E y la desviación de la interfase η están relacionadas con el número de Froude compuesto por [17, 20]

$$(3.47) \quad \frac{\partial E}{\partial \eta} = 1 - G^2,$$

de modo que el signo de esta derivada parcial determina si el flujo parcial es internamente subcrítico, crítico, o supercrítico. Como estamos considerando fijos G_0^2 y k , la ecuación (3.46) da, para cada valor de β , una relación entre E y η . En la figura 3.9 se presentan dos de estas *curvas de energía*, con $k = 1/2$ y $G_0 = 1/2$.

En la primera, para $\beta = 1/2$, η es una función monótona decreciente de E , por lo que (3.47) implica que el flujo es supercrítico independientemente de la posición de la interfase. En cambio, para $\beta = 0$, existen valores de E para los que son posibles

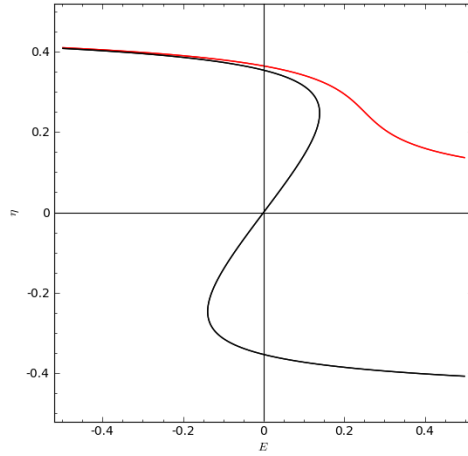


FIGURA 3.9. Curvas de energía para $k = 1/2$. En rojo, la curva para $\beta = 1/2$; en negro, la curva para $\beta = 0$.

tres posiciones de la interfase: una correspondiendo a flujo supercrítico con una capa superior de poca altura; otra correspondiendo a flujo supercrítico con una capa inferior de poca altura; y otra correspondiente a flujo subcrítico.

Describamos ahora el esquema de clasificación. Incorporaremos resaltos internos débiles, en los que se disipan cantidades significativas de energía, principalmente en la capa inferior. Así, tendremos que E disminuirá en estos resaltos según (3.35). Otras fuentes de pérdidas de energía, como la mezcla entre capas, la separación de capas límite aguas abajo del obstáculo y los efectos de la curvatura de las líneas de flujo, no serán tenidos en cuenta. En caso de no existir un resalto hidráulico, la energía interna será constantemente nula; la convención en caso de que se forme un resalto es que E sea positiva aguas arriba del resalto y nula aguas abajo del mismo.

Para el problema planteado, son importantes cinco variables: Y , g' , q_1 , q_2 y la altura máxima del obstáculo, h_m . Con estas variables podemos formar tres números adimensionalizados: el caudal relativo de la capa inferior $k = q_2/(q_1 + q_2)$, la altura máxima del obstáculo $\beta_m = h_m/Y$, y el número de Froude del flujo sin el obstáculo, $G_0 = ((q_1 + q_2)/g'k(1 - k)Y^3)^{1/2}$. Para cada valor de k fijo, con este esquema de clasificación podemos colocar los flujos en el plano (β_m, G_0) .

Fijados los parámetros k , β_m , G_0 , la curva de energía para el flujo solo cambia al cambiar β , esto es, al pasar el flujo sobre el obstáculo. Luego, son de interés especial las curvas de energía para $\beta = 0$ y $\beta = \beta_m$, a las que llamaremos *curva para el canal* y *curva para la cima*, respectivamente. Para un amplio rango de parámetros estas curvas presentan un mínimo y un máximo local [35]. Nos referiremos al mínimo relativo de la curva de la cima como E_c y al máximo local de la del canal como E_a . El primero de estos corresponde a un posible control en la cima del obstáculo, el segundo a un posible control en la región plana del canal. El máximo relativo de

la curva de la cima y el mínimo relativo de la curva del canal no corresponden a posibles controles [20].

De esta forma, tenemos cuatro posibles regímenes:

Régimen I. Flujo subcrítico: ocurre cuando $E_c < 0$. Aquí la presencia del obstáculo produce una pequeña depresión en la interfase. No es posible la presencia de ningún control topográfico relacionado con el obstáculo. Aguas abajo de éste, la capa inferior disminuye su velocidad, por lo que se puede observar separación de la capa límite [35].

Régimen II. Flujo controlado en la cima: corresponde a $0 < E_c < E_a$. Como $E_c > 0$, no tenemos una solución estacionaria con esta energía, y se produce un estrangulamiento de la capa inferior, elevando el nivel de la interfase aguas arriba del obstáculo hasta que la energía interna alcanza E_c . El flujo pasa de internamente subcrítico a supercrítico en la cima, y vuelve a ajustarse a las condiciones subcríticas aguas abajo mediante un resalto hidráulico.

Régimen III. Flujo controlado aguas arriba del obstáculo: aquí $0 < E_a < E_c$. Es similar con el flujo controlado en la cima en que tenemos un control asociado con el obstáculo, y en que aguas abajo de éste se produce un resalto hidráulico interno. La diferencia está en que aquí el control se encuentra cerca del pie del obstáculo, no en la cima. Entre el control y la cima, la posición de la interfase varía de acuerdo a (3.44); sin embargo, aguas abajo de la cresta se observa que la interfase cae rápidamente. Esta caída es explicada por la curvatura de las líneas de flujo [35, 23]. En este fenómeno, el flujo pasa de un régimen supercrítico con la capa superior activa a uno supercrítico con la capa inferior activa. Aguas abajo del obstáculo se produce el resalto necesario para pasar a las condiciones subcríticas. Consistentemente con [53], la disipación en el resalto interno afecta principalmente a la capa inferior.

Régimen IV. Flujo supercrítico: corresponde a $G_0^2 > 1$, y el efecto del obstáculo es producir una pequeña elevación en la interfase. En este régimen también se observa separación de la capa límite en el fluido más denso aguas abajo del obstáculo [35].

Los regímenes I, II y IV son análogos a las de una única capa presentados en el capítulo 1; el régimen III no tiene correspondiente. En la figura 3.10 se presenta la clasificación gráficamente en el plano (β_m, G_0) , para $k = 1/2$. Esta consiste de los gráficos de las curvas definidas por $E_c = 0$, $E_c = E_a$ y $G_0 = 1$.

Si bien en este esquema no tuvimos en cuenta ciertos fenómenos observados experimentalmente, como separación de capas límite o variaciones abruptas en la interfase debidas a efectos de presiones no hidrostáticas, la ocurrencia de éstos no es significativa aguas arriba del obstáculo [20]. Por ende, no se ve afectada la ubicación de los controles hidráulicos.

El esquema presentado por Baines [9] presenta ciertas diferencias con el que aquí introducimos. El corrimiento del obstáculo genera ciertos tipos de perturbaciones (saltos hidráulicos, ondas de rarefacción o una combinación de ambos) que se alejan del obstáculo [6]. Sin embargo, en ciertos casos en que se formaron ondas de rarefacción, la longitud del tanque en el que se realizaron los experimentos no fue suficiente para que se alcanzara un estado estacionario [7].

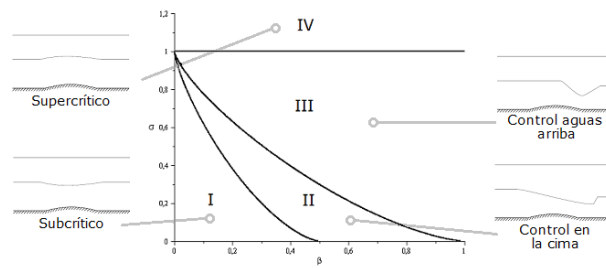


FIGURA 3.10. Clasificación en el plano (β, G) del flujo estacionario de dos capas sobre un obstáculo. Las regiones están numeradas según los regímenes correspondientes.

Los esquemas presentan los mismos límites para los regímenes subcrítico y supercrítico, ya que no existen perturbaciones aguas arriba del obstáculo asociadas con ellos. En los regímenes controlados existen diferencias asociadas con los efectos aguas arriba del obstáculo móvil.

Aproximación de flujos continuamente estratificados por modelos con estratificaciones discretas.

En flujos con estratificaciones discretas, el estudio de la dinámica interna es relativamente simple, siendo posible determinar analíticamente condiciones sencillas para la existencia de controles hidráulicos, clasificar el estado de estos flujos de acuerdo a números de Froude internos, y determinar aspectos de la dinámica en términos de capas activas. Por otra parte, en flujos con estratificaciones continuas los resultados son más complejos de obtener, y de difícil aplicación práctica. Resulta de interés, entonces, aproximar flujos con estratificaciones continuas por modelos en capas, y en base a los resultados analíticos obtenidos para estos, tener estimaciones de lo que ocurre en los flujos originales.

Las primeras secciones de este capítulo están dedicadas a plantear las ecuaciones que gobiernan un sistema de tres capas homogéneas no miscibles. Allí se introducen condiciones para la presencia de controles hidráulicos, y se extiende el enfoque del plano de números de Froude de la sección 3.3 a este sistema.

Luego, en las secciones 4.3 y 4.4 se muestran algunos resultados de simulaciones numéricas para flujos continuamente estratificados a través de contracciones y sobre topografía, y se los intenta aproximar por modelos en tres capas. El procedimiento utilizado para obtener los modelos en cada caso es explicado, así como también la posibilidad de simplificar aún más los modelos, teniendo en cuenta la presencia de capas activas. Algunas conclusiones generales que pueden inferirse a partir de los resultados obtenidos con estos modelos se presentan en la sección 4.5.

4.1. Controles y regularidad en un sistema de tres capas

Comencemos planteando las condiciones para que un sistema formado por tres capas presente un control hidráulico, y utilicémoslas para definir un número de Froude compuesto para este flujo. Con este parámetro adimensionalizado, se mostrarán las condiciones que deben cumplir los flujos para permanecer regulares al pasar por contracciones laterales o sobre una loma.

Consideremos un sistema formado por tres capas homogéneas no miscibles, en un canal de sección transversal rectangular, con ancho $b(x)$ y fondo con nivel $h(x)$ (figura 4.1). Supongamos que las diferencias de densidades relativa son pequeñas, así como también los números de Froude externos de las tres capas. Así, de acuerdo a lo discutido en la sección 3.1.3, vale la hipótesis de tapa rígida:

$$(4.1) \quad y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + h(x) = \text{constante.}$$

Las ecuaciones de aguas someras para este sistema pueden ser planteadas como en (3.11),

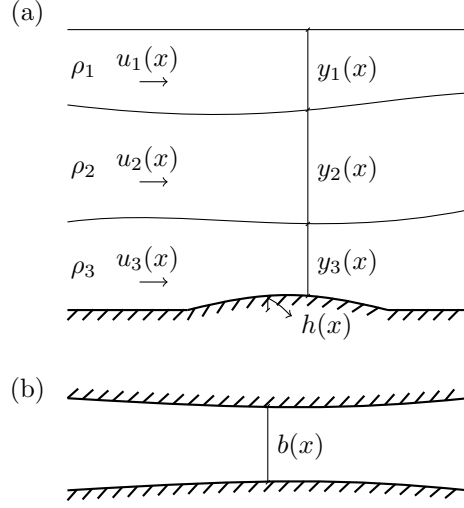


FIGURA 4.1. Flujo de tres capas uniformes en un canal con sección transversal rectangular: (a) vista lateral; (b) vista horizontal.

$$(4.2) \quad \mathbf{C}\mathbf{v}_x = \mathbf{D}\mathbf{f}_x,$$

donde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & g & g & g \\ 0 & u_2 & 0 & r_{12}g & g & g \\ 0 & 0 & u_3 & r_{13}g & r_{23}g & g \\ y_1 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -g & 0 \\ -g & 0 \\ -g & 0 \\ 0 & q_1 \\ 0 & q_2 \\ 0 & q_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} h \\ 1/b \end{pmatrix}, \quad r_{ij} = \frac{\rho_i}{\rho_j}.$$

Por otra parte, el determinante (3.5) es, en este caso,

$$(4.3) \quad \begin{vmatrix} -1 + F_1^2 & F_1^2 & 0 \\ r_{12}F_1^2 & r_{12} - 1 + F_2^2 + r_{12}F_1^2 & F_2^2 \\ 0 & r_{23}F_2^2 & r_{23} - 1 + F_3^2 + r_{23}F_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

donde los F_i son los números de Froude externos de cada capa. Definiendo los números de Froude internos

$$Fr_1^2 = \frac{u_1^2}{g(1-r_{12})y_1}, \quad Fr_2^2 = \frac{u_2^2(1-r_{13})}{g(1-r_{12})(1-r_{23})y_2}, \quad Fr_3^2 = \frac{u_3^2}{g(1-r_{23})y_3},$$

la condición de control (4.3) se puede escribir como

$$(4.4) \quad Fr_1^2 + Fr_2^2 + Fr_3^2 - \frac{(1-r_{12})}{(1-r_{13})} Fr_1^2 Fr_2^2 - \frac{(1-r_{23})}{(1-r_{13})} Fr_2^2 Fr_3^2 - Fr_1^2 Fr_3^2 + \frac{(1-r_{12})(1-r_{23})}{(1-r_{13})} Fr_1^2 Fr_2^2 Fr_3^2 = 1.$$

De forma análoga a la del desarrollo para dos capas, llamemos *número de Froude compuesto* G^2 a la suma del lado izquierdo de la igualdad (4.4). Es directo observar que

$$G^2 = 1 + \frac{\det(\mathbf{C})}{g^3 y_1 y_2 y_3 (1 - r_{12})(1 - r_{23})},$$

de modo que en un control hidráulico la matriz \mathbf{C} es singular. Resolviendo el sistema (4.2), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= - \left[\frac{1 - \left(1 + R_2 \frac{y_2}{y_1}\right) Fr_2^2 - Fr_3^2 + \left(1 + \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_3}{y_1}\right) R_2 Fr_2^2 Fr_3^2}{1 - G^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} + \left[\frac{R_2 Fr_2^2 Fr_3^2}{1 - G^2} \right] \frac{1}{y_1} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{1}{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} &= - \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{r_{12} y_1}{y_2}\right) Fr_1^2 - \left(1 + \frac{y_3}{y_2}\right) Fr_3^2 + \left(\frac{r_{12} y_1}{y_2} + 1 + \frac{y_3}{y_2}\right) Fr_1^2 Fr_3^2}{1 - G^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} + \left[\frac{-(1 - Fr_1^2) Fr_3^2}{1 - G^2} \right] \frac{1}{y_2} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{1}{u_3} \frac{\partial u_3}{\partial x} &= - \left[\frac{1 - Fr_1^2 - \left(1 + \frac{R_1 y_2}{y_3}\right) Fr_2^2 + \left(\frac{r_{12} y_1}{y_3} + \frac{y_2}{y_3} + \frac{1}{r_{23}}\right) R_1 Fr_1^2 Fr_2^2}{1 - G^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} + \left[\frac{1 - Fr_1^2 - Fr_2^2 + \frac{R_1}{r_{23}} Fr_1^2 Fr_2^2}{1 - G^2} \right] \frac{1}{y_3} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{1}{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x} &= - \left[\frac{G^2 - \left(1 + R_2 \frac{y_2}{y_1}\right) Fr_2^2 - Fr_3^2 + \left(1 + \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_3}{y_1}\right) R_2 Fr_2^2 Fr_3^2}{1 - G^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} - \left[\frac{R_2 Fr_2^2 Fr_3^2}{1 - G^2} \right] \frac{1}{y_1} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{1}{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x} &= - \left[\frac{G^2 - \left(1 + \frac{r_{12} y_1}{y_2}\right) Fr_1^2 - \left(1 + \frac{y_3}{y_2}\right) Fr_3^2 + \left(\frac{r_{12} y_1}{y_2} + 1 + \frac{y_3}{y_2}\right) Fr_1^2 Fr_3^2}{1 - G^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} - \left[\frac{-(1 - Fr_1^2) Fr_3^2}{1 - G^2} \right] \frac{1}{y_2} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{1}{y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x} &= - \left[\frac{G^2 - Fr_1^2 - \left(1 + \frac{R_1 y_2}{y_3}\right) Fr_2^2 + \left(\frac{r_{12} y_1}{y_3} + \frac{y_2}{y_3} + \frac{1}{r_{23}}\right) R_1 Fr_1^2 Fr_2^2}{1 - G^2} \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} - \left[\frac{1 - Fr_1^2 - Fr_2^2 + \frac{R_1}{r_{23}} Fr_1^2 Fr_2^2}{1 - G^2} \right] \frac{1}{y_3} \frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned}$$

Aquí utilizamos los parámetros

$$\begin{aligned} R_1 &= \left(\frac{1 - r_{12}}{1 - r_{13}} \right) r_{23}, \\ R_2 &= 1 - R_1 = \frac{1 - r_{23}}{1 - r_{13}}, \end{aligned}$$

que pueden variar entre 0 y 1.

De esta forma, para que las soluciones del sistema (4.2) permanezcan regulares en las secciones críticas, es necesario que todos los denominadores en las soluciones anteriores se anulen. Obtenemos así ciertas condiciones necesarias para controles hidráulicos. Tomemos dos casos particulares.

4.1.1. Canales con fondo con nivel constante. Al imponer $G^2 = 1$, se tienen que satisfacer las igualdades

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(1 + R_2 \frac{y_2}{y_1}\right) Fr_2^2 - Fr_3^2 + \left(1 + \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_3}{y_1}\right) R_2 Fr_2^2 Fr_3^2 \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} &= 0, \\ \left[1 - \left(1 + \frac{y_1}{y_2}\right) Fr_1^2 - \left(1 + \frac{y_3}{y_2}\right) Fr_3^2 + \left(\frac{y_1}{y_2} + 1 + \frac{y_3}{y_2}\right) Fr_1^2 Fr_3^2 \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} &= 0, \\ \left[1 - Fr_1^2 - \left(1 + R_1 \frac{y_2}{y_3}\right) Fr_2^2 + \left(\frac{y_1}{y_3} + \frac{y_2}{y_3} + 1\right) R_1 Fr_1^2 Fr_2^2 \right] \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

$$G^2 = 1.$$

De estas cuatro ecuaciones, sólo tres son independientes. Al igual que en el caso de dos capas, este flujo puede presentar dos tipos de controles. Por una parte, aquellos

determinados exclusivamente por la geometría, en una sección en la que $\frac{\partial b}{\partial x} = 0$. Por otra parte, tenemos controles virtuales, determinados conjuntamente por la geometría del canal y el flujo, en secciones en las que $G^2 = 1$.

4.1.2. Canales con ancho constante. Si el flujo es crítico, para que las soluciones se mantengan regulares se tienen que cumplir

$$R_2 \text{Fr}_2^2 \text{Fr}_3^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

$$[(1 - \text{Fr}_1^2) \text{Fr}_3^2] \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

$$[1 - \text{Fr}_1^2 - \text{Fr}_2^2 + R_1 \text{Fr}_1^2 \text{Fr}_2^2] \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

$$G^2 = 1.$$

Estas condiciones implican que los controles sólo son posibles en secciones en las que $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$.

En estos dos casos, las condiciones necesarias para la presencia de controles hidráulicos son coherentes con las formuladas en el capítulo 3, tanto para flujos de dos capas como para flujos continuamente estratificados.

4.2. Soluciones en el espacio de números de Froude

En esta sección presentaremos la herramienta análoga a la introducida en la sección 3.4. Obsevemos que bajo la aproximación de Boussinesq, el número de Froude compuesto puede ser considerado como

$$G^2 = \text{Fr}_1^2 + \text{Fr}_2^2 + \text{Fr}_3^2 - R_1 \text{Fr}_1^2 \text{Fr}_2^2 - R_2 \text{Fr}_2^2 \text{Fr}_3^2 - \text{Fr}_1^2 \text{Fr}_3^2,$$

y la ecuación $G^2 = 1$ define una *superficie crítica* en el espacio $(\text{Fr}_1^2, \text{Fr}_2^2, \text{Fr}_3^2)$.

Supongamos conocidos y fijos los caudales de cada capa, $Q_i = b u_i y_i$. Tomemos como referencia alguna sección en que el fondo del canal satisfaga $h = 0$; llamemos $(y_1 + y_2 + y_3)_0$ y b_0 al nivel de la superficie libre y el ancho del canal en dicha sección, respectivamente. Con ellos, podemos adimensionalizar las longitudes y caudales del problema:

$$\begin{aligned} y_i^* &= \frac{y_i}{(y_1 + y_2 + y_3)_0}, \quad h^* = \frac{h}{(y_1 + y_2 + y_3)_0}, \quad b^* = \frac{b}{b_0}, \\ Q_1^* &= \frac{Q_1}{g^{1/2} (1 - r_{12})^{1/2} b_0 (y_1 + y_2 + y_3)_0^{3/2}}, \\ Q_2^* &= \frac{Q_2 (1 - r_{13})^{1/2}}{g^{1/2} (1 - r_{12})^{1/2} (1 - r_{23})^{1/2} b_0 (y_1 + y_2 + y_3)_0^{3/2}}, \\ Q_3^* &= \frac{Q_3}{g^{1/2} (1 - r_{23})^{1/2} b_0 (y_1 + y_2 + y_3)_0^{3/2}}. \end{aligned}$$

Observemos que los tirantes adimensionalizados se pueden escribir en función de los números de Froude internos Fr_i :

$$y_i^* = \left(\frac{Q_i^*}{b^*} \right)^{2/3} \text{Fr}_i^{-2/3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

La ecuación de superficie libre (4.1) puede ser escrita en forma adimensionalizada como

$$y_1^* + y_2^* + y_3^* + h^* = 1,$$

y utilizando las relaciones anteriores,

$$(4.5) \quad q_{r_{12}}^{2/3} \text{Fr}_1^{-2/3} + \text{Fr}_2^{-2/3} + q_{r_{23}}^{-2/3} \text{Fr}_3^{-2/3} = (1 - h^*) \left(\frac{b^*}{Q_2^*} \right)^{2/3},$$

donde $q_{r_{ij}} = Q_i^*/Q_j^*$. Al igual que para el caso de dos capas, esta última ecuación define, fijados los caudales de las capas y la geometría del canal, una superficie de posibles números de Froude para el sistema.

Por otra parte, llamando p_0 a la presión en la superficie libre del sistema, tenemos la carga de cada una de las capas:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2} \rho_1 u_1^2 + \rho_1 g (y_1 + y_2 + y_3 + h) + p_0, \\ H_2 &= \frac{1}{2} \rho_2 u_2^2 + \rho_1 g y_1 + \rho_2 g (y_2 + y_3 + h) + p_0, \\ H_3 &= \frac{1}{2} \rho_3 u_3^2 + \rho_1 g y_1 + \rho_2 g y_2 + \rho_3 g (y_3 + h) + p_0. \end{aligned}$$

A continuación consideraremos en forma independiente flujos en canales en los que o bien h o bien b permanecen constantes.

4.2.1. Flujos a través de contracciones. Aquí se tiene $h^* = 0$, de modo que la ecuación de superficie libre puede ser escrita

$$(4.6) \quad q_{r_{12}}^{2/3} \text{Fr}_1^{-2/3} + \text{Fr}_2^{-2/3} + q_{r_{23}}^{-2/3} \text{Fr}_3^{-2/3} = \left(\frac{b^*}{Q_2^*} \right)^{2/3}.$$

La diferencia de cargas adimensionalizada entre la capa media y superior es

$$\frac{H_2 - H_1}{g \rho_2 (1 - r_{12}) (y_1 + y_2 + y_3)_0} = 1 - y_1^* - \frac{1}{2} y_1^* \text{Fr}_1^2 - \frac{R_2}{2} y_2^* \text{Fr}_2^2.$$

Definiendo

$$(4.7) \quad Y_1^* = \frac{H_1 - H_2}{g \rho_2 (1 - r_{12}) (y_1 + y_2 + y_3)_0} + 1,$$

el tirante adimensionalizado de la capa superior en el caso en que los números de Froude internos se aproximan a cero, podemos escribir esta última ecuación como

$$(4.8) \quad \frac{R_2}{2} \text{Fr}_2^{4/3} - \frac{1}{2} q_{r_{12}}^{2/3} \text{Fr}_1^{4/3} + \text{Fr}_2^{-2/3} + q_{r_{23}}^{-2/3} \text{Fr}_3^{-2/3} = (1 - Y_1^*) \left(q_{r_{12}}^{2/3} \text{Fr}_1^{-2/3} + \text{Fr}_2^{-2/3} + q_{r_{23}}^{-2/3} \text{Fr}_3^{2/3} \right).$$

Por otra parte, si consideramos la diferencia de cargas entre la capa inferior y media,

$$\frac{H_3 - H_2}{g \rho_3 (1 - r_{23}) (y_1 + y_2 + y_3)} = \frac{1}{2} \text{Fr}_3^2 y_3^* - \frac{R_1}{2} \text{Fr}_2^2 y_2^* + y_3^*,$$

tenemos que esta magnitud debe ser el tirante adimensionalizado de la capa inferior Y_3^* cuando los números de Froude internos se aproximan a cero. Así, tenemos la igualdad

$$(4.9) \quad \frac{1}{2} q_{r_{23}}^{-2/3} \text{Fr}_3^{4/3} - \frac{R_1}{2} \text{Fr}_2^{4/3} + q_{r_{23}}^{-2/3} \text{Fr}_3^{-2/3} = Y_3^* \left(q_{r_{12}}^{2/3} \text{Fr}_1^{-2/3} + \text{Fr}_2^{-2/3} + q_{r_{23}}^{-2/3} \text{Fr}_3^{-2/3} \right).$$

Las ecuaciones (4.8) y (4.9) determinan las *curvas solución* en el espacio de números de Froude. La representación gráfica de estas curvas no es tan simple como en el caso de dos capas; en la figura 4.2 se muestra una de estas curvas solución.

Describamos brevemente el comportamiento de estas curvas. En general, presentan siete comportamientos asintóticos con $\|(\text{Fr}_1^2, \text{Fr}_2^2, \text{Fr}_3^2)\| \rightarrow \infty$:

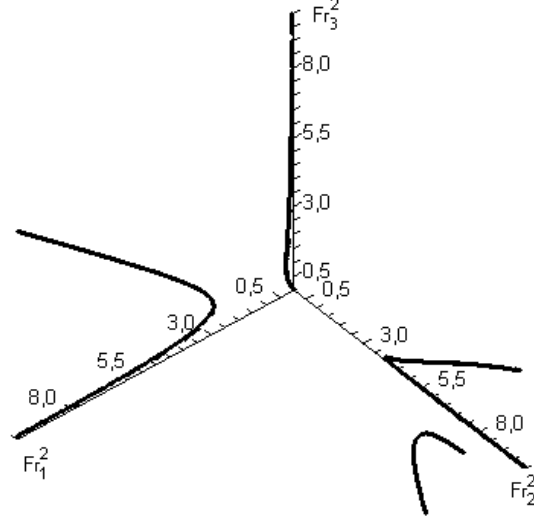


FIGURA 4.2. Curva solución en un espacio de números de Froude para un flujo a través de una contracción. Aquí se fijaron los parámetros $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}$, $q_{r12} = 1.5$, $q_{r23} = 0.7$, $Y_1^* = 0.38$, $Y_3^* = 0.32$.

- En caso de que $Fr_1^2 \rightarrow \infty$, $Fr_2^2 \rightarrow \infty$, $Fr_3^2 \rightarrow \infty$, tendremos que necesariamente la curva solución tiene dirección asintótica según el vector $\left(q_{r12}^{-1}R_2^{3/2}, 1, q_{r23}R_1^{3/2}\right)$.
- Para $Fr_1^2 \rightarrow \infty$, $Fr_2^2 \rightarrow \infty$, $Fr_3^2 \rightarrow 0$, la dirección asintótica de la curva solución es la del vector $\left(q_{r12}^{-1}\left(R_1\left(\frac{Y_1^*}{1-Y_3^*} + R_2\right)^{3/2}\right), 1, 0\right)$.
- Cuando $Fr_1^2 \rightarrow \infty$, $Fr_2^2 \rightarrow 0$, $Fr_3^2 \rightarrow \infty$, se tiene que la curva solución tiene dirección asintótica dada por el vector $\left(1, 0, q_{r13}\left(\frac{Y_3^*}{Y_1^*}\right)^{3/2}\right)$.
- Si se cumple $Fr_1^2 \rightarrow 0, Fr_2^2 \rightarrow \infty, Fr_3^2 \rightarrow \infty$, entonces la curva solución presenta como dirección asintótica la del vector $\left(0, 1, q_{r23}\left(R_1 + \frac{Y_3^*}{1-Y_1^*}R_2\right)^{3/2}\right)$.
- También se tienen, como asíntotas de las curvas solución, a los tres ejes coordenados.

En principio, una contracción podría acelerar cualquiera de las capas. La existencia de estos siete posibles regímenes asintóticos es coherente con los resultados desarrollados en el capítulo 3 y con los experimentos de Armi [2] para el flujo de dos capas. En los experimentos descritos en dicho trabajo cualquiera de las capas podía ser acelerada, o ambas, de acuerdo a las condiciones de descarga del canal.

Las direcciones asintóticas halladas no dependen de las condiciones de entrada o descarga, esto es, no dependen de Y_1^*, Y_2^*, Y_3^* . Aquí, el primer comportamiento asintótico se corresponde con tres capas activas; el segundo, tercero y cuarto, con dos capas activas acopladas; y los tres últimos con una única capa activa. Si modelamos

un flujo con dos capas activas, conociendo las densidades y caudales de los fluidos, sólo precisaríamos uno de los números de Froude de las capas activas para tener una estimación del de la otra. El comportamiento del flujo en este caso es como el presentado en el capítulo 3 para dos capas acopladas.

Por otra parte, con $\|(\text{Fr}_1^2, \text{Fr}_2^2, \text{Fr}_3^2)\| \rightarrow 0$ encontramos un único comportamiento posible:

- La tangente a las curvas solución en dicho caso está dada por el vector $\left(q_{r_{12}}^2 \left(\frac{1-Y_1^*-Y_1^*}{Y_1^*} \right)^3, 1, q_{r_{23}}^{-2} \left(\frac{1-Y_1^*-Y_3^*}{Y_3^*} \right)^3 \right)$.

4.2.2. Flujos sobre topografía. En este caso, tenemos $b = b_0$, de modo que $b^* = 1$. La ecuación de superficie libre (4.5) se puede escribir como

$$(4.10) \quad q_{r_{12}}^{2/3} \text{Fr}_1^{-2/3} + \text{Fr}_2^{-2/3} + q_{r_{23}}^{-2/3} \text{Fr}_3^{-2/3} = (1 - h^*) Q_2^{*-2/3}.$$

La diferencia adimensionalizada de cargas entre las capas superior y media es:

$$\frac{H_1 - H_2}{g\rho_2(1 - r_{12})(y_1 + y_2 + y_3)_0} = \frac{1}{2} y_1^* \text{Fr}_1^2 - \frac{R_2}{2} y_2^* \text{Fr}_2^2 - (y_2^* + y_3^* + h^*).$$

Definiendo Y_1^* como en (4.7), la ecuación anterior puede ser escrita de la forma:

$$(4.11) \quad \frac{R_2}{2} q_{r_{12}}^{-2/3} \text{Fr}_2^{4/3} - \frac{1}{2} \text{Fr}_1^{4/3} - \text{Fr}_1^{-2/3} + Q_1^{*-2/3} Y_1^* = 0.$$

Por otra parte, la diferencia de cargas entre la capa del medio y la inferior es

$$\frac{H_2 - H_3}{g\rho_3(1 - r_{23})(y_1 + y_2 + y_3)_0} = \frac{R_1}{2} y_2^* \text{Fr}_2^2 - \frac{1}{2} y_3^* \text{Fr}_3^2 - (y_3^* + h^*).$$

Considerando

$$Y_1^* + Y_2^* = \frac{H_2 - H_3}{g\rho_3(1 - r_{23})(y_1 + y_2 + y_3)_0} + 1,$$

la igualdad anterior puede ser escrita como

$$(4.12) \quad \frac{R_1}{2} \text{Fr}_2^{4/3} - \frac{1}{2} q_{r_{23}}^{-2/3} \text{Fr}_3^{4/3} + q_{r_{12}}^{2/3} \text{Fr}_1^{-2/3} + \text{Fr}_2^{-2/3} = Q_2^{*-2/3} (Y_1^* + Y_2^*).$$

Las curvas definidas por la intersección de las superficies (4.11) y (4.12), son las llamadas *curvas solución*. Al variar el fondo del canal, las soluciones se van moviendo a lo largo de ellas, y según la ecuación de superficie libre (4.10).

Analicemos el comportamiento de estas curvas con $\|(\text{Fr}_1^2, \text{Fr}_2^2, \text{Fr}_3^2)\| \rightarrow \infty$. En este caso, podemos tener tres comportamientos asintóticos distintos:

- Si $\text{Fr}_1^2 \rightarrow \infty$, $\text{Fr}_2^2 \rightarrow \infty$, $\text{Fr}_3^2 \rightarrow \infty$, entonces la curva solución tiene que tener dirección asintótica paralela al vector $\left(q_{r_{12}}^{-1} R_2^{3/2}, 1, q_{r_{23}} R_1^{3/2} \right)$.
- Si $\text{Fr}_1^2 \rightarrow 0$, $\text{Fr}_2^2 \rightarrow \infty$, $\text{Fr}_3^2 \rightarrow \infty$, tendremos que la curva solución tiene dirección asintótica de acuerdo al vector $(0, 1, q_{r_{23}})$.
- El último comportamiento asintótico posible es $\text{Fr}_1^2 \rightarrow \alpha$, $\text{Fr}_2^2 \rightarrow 0$, $\text{Fr}_3^2 \rightarrow \infty$, donde α puede ser cualquiera de las dos soluciones positivas de la ecuación

$$\frac{x^{2/3}}{2} + x^{-1/3} = Q_1^{*-2/3} Y_1^*.$$

Esta última igualdad sólo tiene soluciones reales si $Q_1^{*-2/3} Y_1^* \geq 3/2$, y en dicho caso, tendremos una raíz mayor y otra menor que 1.

El primer comportamiento asintótico corresponde a tres capas activas. En cambio, los últimos dos corresponden a dos capas activas. La presencia de variaciones de nivel en el fondo del canal afecta fundamentalmente a la capa inferior; no es posible acelerar la capa media o la superior sin acelerar la capa inferior. Esto es consistente con las observaciones de Armi sobre flujos de dos capas en canales con ancho constante. El segundo caso corresponde a acelerar las dos capas inferiores, manteniendo la capa superior en estado pasivo.

4.3. Experimentos para flujos a través de contracciones

Emplearemos el modelo en tres capas desarrollado anteriormente para aproximar flujos estacionarios de fluidos viscosos, continuamente estratificados, en canales de sección rectangular con fondo de nivel constante y ancho variable. Existen varios trabajos experimentales acerca de extracciones selectivas de reservorios continuamente estratificados [52, 12, 5]; para este se realizaron simulaciones numéricas utilizando el resolvidor de flujo CAFFA3D.MB [50]. Este código es una implementación en Fortran95 de un método de volúmenes finitos implícito para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en geometrías complejas, y ha sido utilizado exitosamente para representar flujos de dos capas sobre obstáculos pronunciados [16, 51]. En estos trabajos, se contrastaron las simulaciones numéricas con resultados experimentales.

Para validar las modificaciones realizadas al código original, se contrastaron algunos resultados numéricos con los experimentales de Armi y Williams [5]. En dicho trabajo, se conectó un tanque (reservorio) de $123 \times 246 \times 24$ cm de vidrio acrílico a un canal del mismo material, y de 10.2 cm de ancho. Este canal presentaba un fondo plano, una porción convergente de 36 cm de largo y una divergente de 50 cm. El ancho del canal variaba suavemente, y en la sección más angosta era de 2 cm (figura 4.3). Aguas abajo en el canal, el fluido podía ser extraído por diversas aberturas, de altura ajustable. La cantidad de fluido extraída fue controlada a través de bombas, por lo que el caudal circulante por el canal es conocido.

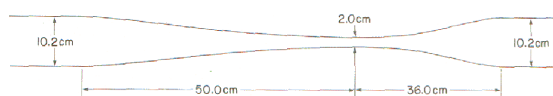


FIGURA 4.3. Vista horizontal del canal con contracción. El sentido del flujo es de derecha a izquierda. Tomado de [5].

En todos los experimentos, el reservorio fue llenado con un nivel de 20 cm. El caudal total siempre fue lo suficientemente bajo como para que la superficie libre descendiera lentamente, y el flujo resultante fuera como el de una extracción estacionaria de un reservorio infinito. Se llenó el tanque con una solución de sal en agua, obteniéndose una estratificación lineal con una variación de densidad del 0.4% entre el fondo del reservorio y la superficie libre.

Presentamos tres simulaciones realizadas con el código CAFFA3D.MB, y para cada una de ellas se muestran las posibilidades de aproximar el flujo mediante uno discretamente estratificado. En los tres casos se impuso que el caudal circulante por el canal fuera de $42 \text{ cm}^3/\text{s}$. La diferencia entre ellos radica en la extracción de distintos estratos de fluido. El primer experimento corresponde a uno de los casos

estudiados por Armi y Williams, y fue utilizado para validar los resultados de las simulaciones numéricas.

4.3.1. contracción₁. Bajo las condiciones de estratificación, caudal y geometría del canal especificados anteriormente, se extrajo fluido desde el fondo del canal. Este experimento fue realizado en primer lugar por Wood [52]; Armi y Williams [5] realizaron mediciones de los perfiles de velocidad horizontal en ciertas secciones del canal.

En el reservorio, en el que el fluido está en reposo, el flujo es subcrítico respecto a todos los modos internos. Al ser acelerado a lo largo del canal, pasa por una sucesión de controles virtuales, cada uno de los cuales permite el pasaje de estado subcrítico a supercrítico respecto a un modo determinado. El flujo es asimétrico respecto a la sección más angosta, en la que ocurre un control respecto al modo interno más alto. De esta forma, el estado del flujo aguas abajo de la contracción es supercrítico.

Naturalmente, para nuestro modelo de tres capas sólo existen dos modos internos, por lo que a lo sumo es posible que existan dos controles a lo largo del canal.

En la resolución numérica de este flujo, se dejó correr al código hasta que las soluciones arrojadas presentaran un comportamiento estacionario. En la figura 4.4 se presentan los perfiles de velocidades horizontales experimentales en tres secciones del canal tomados de [5] y los correspondientes de la simulación numérica. En esta figura se puede observar que los resultados numéricos se corresponden adecuadamente con los experimentales.

A continuación presentaremos el procedimiento utilizado para aproximar los flujos continuamente estratificados por otros formados por tres capas homogéneas y no miscibles. En primer lugar, se consideraron ciertos perfiles de entrada simplificados, tanto de densidades como de velocidades horizontales. Como en los experimentos de Armi y Williams se trabajó con estratificaciones lineales, aquí se tomó como perfil de densidad simplificado a la propia recta, considerando que en la superficie libre $\rho = \rho_0$. Así, el perfil de densidades a aproximar fue

$$\rho(y) = \rho_0 (1 + \varepsilon(1 - y)),$$

donde $\varepsilon = 0.004$ es la variación de densidad relativa entre el fondo del canal y la superficie libre, e y es la altura adimensionalizada. Para el modelo discreto, se consideró la densidad de cada capa como la media de densidades en la porción vertical de fluido que la capa representa.

El perfil de velocidades horizontales en la entrada del canal fue tomado de los resultados de la simulación numérica. Luego, este perfil fue aproximado por una recta de la forma

$$u(y) = U_0 + \alpha y.$$

El valor de α fue tomado de la simulación, mientras que el de U_0 fue ajustado para que el caudal del perfil aproximado coincidiera con el fijado en el experimento numérico. Así, una vez fijado el perfil de entrada simplificado, alcanza con conocer los tirantes de dos de las capas para lograr una aproximación discreta de las velocidades de entrada (figura 4.5).

De esta forma, al ser conocidos la geometría del canal, el caudal total, el nivel de la superficie libre y los perfiles de densidad y velocidad horizontal aguas arriba en el canal, tenemos formulado nuestro problema en función de los tirantes de dos de las capas en la entrada del mismo.

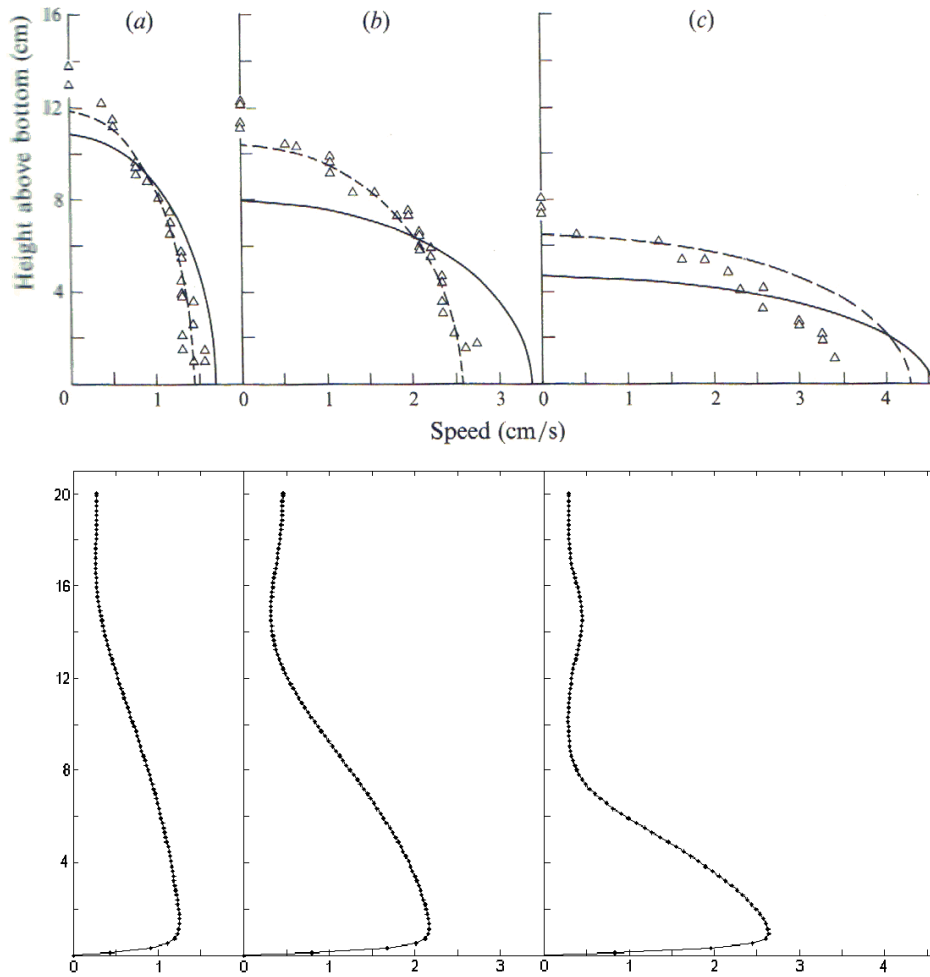


FIGURA 4.4. Perfiles de velocidad horizontal (a) 10 *cm* aguas arriba de la sección más angosta; (b) en la sección más angosta; (c) 10 *cm* aguas abajo de la sección más angosta. Arriba, con Δ se representan los perfiles experimentales (tomados de [5]). Abajo, perfiles obtenidos numéricamente.

Consideremos como variables a determinar a los tirantes adimensionalizados de las capas media e inferior en la entrada del canal, y_{20} e y_{30} . En principio, las únicas restricciones generales para estos parámetros es que se satisfagan las condiciones

$$(4.13) \quad \begin{aligned} y_{20} &\geq 0, \\ y_{30} &\geq 0, \\ y_{20} + y_{30} &\leq 1. \end{aligned}$$

Una vez elegido un par (y_{20}, y_{30}) tendremos determinadas las densidades de las capas, y en consecuencia, los valores de R_1 , R_2 , los caudales de cada capa y los valores de Y_1^* e Y_3^* . Obtenemos las curvas solución en el espacio (Fr_1^2, Fr_2^2, Fr_3^2) para el modelo discreto.

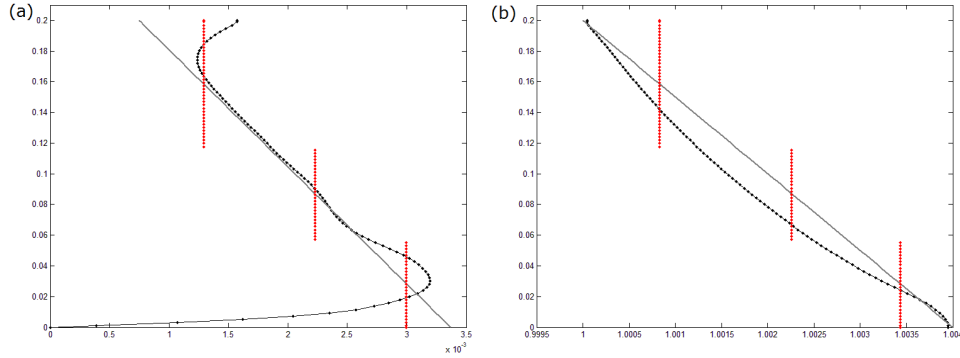


FIGURA 4.5. En negro, perfiles de (a) velocidad horizontal y (b) densidad en la entrada del canal. En gris se representan los perfiles aproximados, y en rojo los perfiles según el modelo de tres capas. Aquí se tomó $y_{20} = 0.3$, $y_{30} = 0.28544$.

No todos los pares (y_{20}, y_{30}) que satisfagan (4.13) son válidos para representar el experimento. En particular, es necesario incorporar información acerca de la geometría del canal en el modelo en capas. Sabemos que el canal tiene un ancho adimensionalizado mínimo $b_{min} = \frac{2}{10.2}$, de modo que es necesario que la curva solución sea tangente a la superficie libre (4.6) para $b = b_{min}$. Asimismo, conocemos las condiciones de descarga en el canal. En este caso, corresponden a extraer fluido desde el fondo del mismo¹.

De este modo, buscamos los posibles valores de (y_{20}, y_{30}) para los que la curva solución es tangente a la superficie

$$(4.14) \quad q_{r_{12}}^{2/3}(y_{20}, y_{30}) Fr_1^{-2/3} + Fr_2^{-2/3} + q_{r_{23}}^{-2/3}(y_{20}, y_{30}) Fr_3^{-2/3} = \left(\frac{b_{min}}{Q_2^*(y_{20}, y_{30})} \right)^{2/3}$$

en algún punto de la rama que tiene como asíntota al eje Fr_3^2 . Además, es necesario que esta rama sea accesible desde el estado aguas arriba en el canal, que es internamente subcrítico. Los valores de admisibles (y_{20}, y_{30}) obtenidos se presentan en la figura 4.6.

Cualquier punto de la curva graficada representa un posible modelo de tres capas que admite un canal de ancho mínimo b_{min} , y que acelera a la capa inferior. Se analizaron distintas elecciones de (y_{20}, y_{30}) , y para cada una de ellas se comparó los flujos de cantidad de movimiento en la dirección del canal,

$$\Phi_Q = \int_S \rho u^2 dS,$$

y de temperaturas,

$$\Phi_T = \int_S T u dS,$$

¹En [5] no se especifica el alto de las aberturas, por lo que se eligió arbitrariamente succionar fluido desde el fondo hasta un alto de 2 cm.

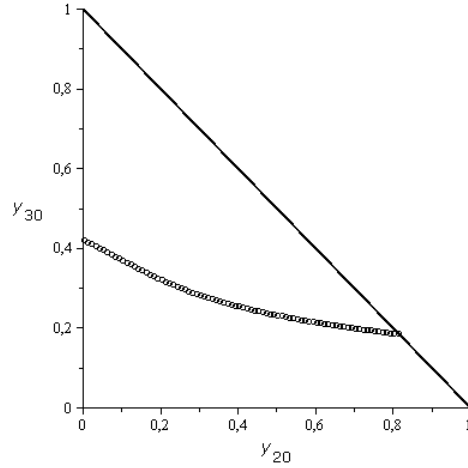


FIGURA 4.6. Valores admisibles de (y_{20}, y_{30}) para que el modelo de tres capas represente la geometría y condiciones de descarga del experimento **contracción₁**.

con los de la solución numérica en cuatro secciones distintas². La elección de estos parámetros para comparar las soluciones responde a que brindan una idea de qué estratos se desplazan más rápidamente, y a qué velocidades lo hacen. Teniendo en cuenta las aplicaciones mencionadas en la introducción, esta información es particularmente relevante. Para comparar estos resultados, se definieron los cocientes

$$\kappa_Q = \frac{\Phi_Q^{\text{tres capas}}}{\Phi_Q^{\text{numérico}}},$$

$$\kappa_T = \frac{\Phi_T^{\text{tres capas}}}{\Phi_T^{\text{numérico}}}.$$

Los resultados se presentan en la tabla 4.1. Allí se puede observar que en general, el error en los modelos de tres capas para los flujos de cantidad de movimiento suele aumentar levemente al desplazarnos aguas abajo en el canal, y típicamente es del orden del 10%. En cambio, los flujos de temperaturas en los modelos de tres capas presentan diferencias del orden del 5% respecto a la simulación numérica. Asimismo, ninguna de las soluciones presentadas resulta globalmente mejor que las demás.

La última de las posibilidades presentada en la tabla 4.1 corresponde a tomar $y_{10} = 0$, esto es, a suponer que sólo existen dos capas. Puede ser obtenida como la única solución suponiendo que sólo se desplazan dos capas, o como un caso límite para los modelos de tres capas, en el que las ecuaciones (4.8) y (4.9) conciden, y sólo se tiene en cuenta el plano (Fr_2^2, Fr_3^2) .

²En la solución numérica, la estratificación fue generada a partir de un gradiente de temperaturas. Se supuso una relación lineal entre temperatura y densidad, lo que permite comparar los resultados analíticos con los numéricos. Se tomó que la densidad mínima, ρ_0 , correspondiera a una temperatura de 10°C, y que la densidad máxima, $\rho_0(1 + \varepsilon)$, a una temperatura de 20°C.

CASO	SECCIÓN									
	Entrada del canal		10 cm aguas arriba de la sección más angosta		Sección más angosta		10 cm aguas abajo de la sección más angosta			
	κ_Q	κ_T	κ_Q	κ_T	κ_Q	κ_T	κ_Q	κ_T	κ_Q	κ_T
$y_{2o} = 0.00001, y_{3o} = 0.42205$	0.99139	0.94114	0.97582	1.00080	1.06240	0.97927	1.19440	0.96554		
$y_{2o} = 0.1, y_{3o} = 0.37238$	0.99981	0.93632	0.93660	0.99566	0.96434	0.97425	1.07310	0.96059		
$y_{2o} = 0.2, y_{3o} = 0.32366$	1.00590	0.93284	0.94200	0.99196	0.91121	0.97064	0.96993	0.95703		
$y_{2o} = 0.3, y_{3o} = 0.28544$	1.00940	0.93084	0.94633	0.98984	0.89604	0.96856	0.91118	0.95498		
$y_{2o} = 0.4, y_{3o} = 0.25683$	1.00940	0.93083	0.94738	0.98983	0.89203	0.96854	0.88032	0.95497		
$y_{2o} = 0.5, y_{3o} = 0.23470$	1.00500	0.93331	0.94428	0.99246	0.88848	0.97112	0.86121	0.95751		
$y_{2o} = 0.6, y_{3o} = 0.21689$	0.99577	0.93862	0.93647	0.99811	0.88211	0.97665	0.84592	0.96296		
$y_{2o} = 0.7, y_{3o} = 0.20210$	0.98111	0.94703	0.92359	1.00710	0.87176	0.98540	0.83079	0.97159		
$y_{2o} = 0.81195, y_{3o} = 0.18805$	0.95792	0.96034	0.91769	1.02910	0.89565	1.01880	0.85643	1.00310		

CUADRO 4.1. Comparación de los flujos de cantidad de movimiento y de temperatura entre las soluciones en tres capas y la obtenida numéricamente para el primer experimento. En negrita, se marca el valor que presenta el menor error en cada sección.

CASO	SECCIÓN									
	Entrada del canal		10 cm aguas arriba de la sección más angosta		Sección más angosta		10 cm aguas abajo de la sección más angosta			
	κ_Q	κ_T	κ_Q	κ_T	κ_Q	κ_T	κ_Q	κ_T	κ_Q	κ_T
$y_{2o} = 0.13802, y_{3o} = 0.1$	0.94945	0.96559	1.03300	0.99788	0.94186	0.97792	0.77438	0.96779		
$y_{2o} = 0.24645, y_{3o} = 0.3$	0.94383	0.97096	1.02820	1.00340	0.95832	0.98335	0.88434	0.97316		
$y_{2o} = 0.3, y_{3o} = 0.40898$	0.93181	0.96628	1.01450	0.99859	0.95852	0.97861	0.95946	0.96848		
$y_{2o} = 0.37555, y_{3o} = 0.5$	0.92060	0.96126	1.00120	0.99340	0.99103	0.97353	1.12070	0.96345		

CUADRO 4.2. Comparación de los flujos de cantidad de movimiento y de temperatura entre las soluciones en tres capas y la obtenida por volúmenes finitos para el experimento **contracción₂**. En negrita, se marca el valor que presenta el menor error en cada sección.

Una particularidad de las soluciones analíticas obtenidas es que en todas ellas, aguas abajo de la sección de mayor contracción, la capa inferior presenta una velocidad mayor a la de la simulación numérica (figura 4.7). En esta última, el rozamiento

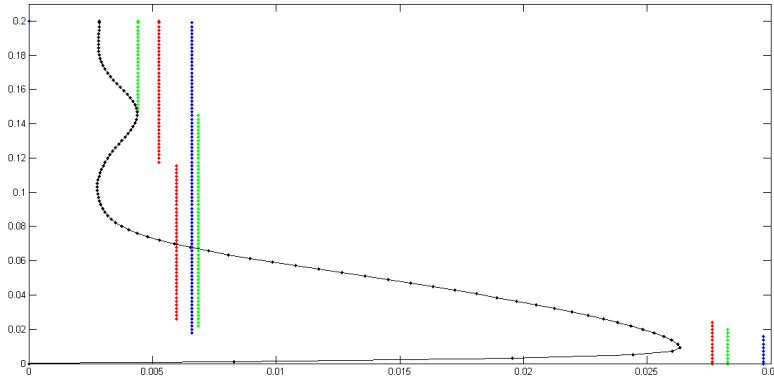


FIGURA 4.7. Perfiles de velocidad horizontal en la sección 10 *cm* aguas abajo de la más angosta del canal para *contracción*₁. Junto al obtenido numéricamente (negro), se presentan los resultados de las aproximaciones con $y_{20} = 0.3$ (rojo), $y_{20} = 0.5$ (verde) e $y_{20} = 0.81195$ (azul).

entre el fluido y el fondo del canal causa una cierta desaceleración de los estratos más densos. En la aproximación por estratificación discreta esta fricción no es tomada en cuenta, pues se considera a los fluidos como perfectos.

4.3.2. *contracción*₂. En este experimento tanto el caudal total como la geometría del canal y la estratificación del fluido fueron iguales a los del caso anterior. De esta forma, la estratificación simplificada fue lineal. La única diferencia fue la condición de descarga; aquí se extrajo fluido de entre 10 *cm* y 12 *cm*.

Por otra parte, se aproximó el perfil de velocidad horizontal en la entrada del canal por uno de la forma

$$u(y) = \alpha\sqrt{y} - \beta((0.5 - y)^2 - 0.5^2).$$

La consigna para imponer este perfil aproximado fue lograr que presentara un máximo en una altura intermedia, cumpliendo a su vez que $u(0) = 0$ y que la velocidad en la superficie libre fuera similar a la velocidad máxima. El valor de α fue tomado a partir del perfil obtenido en la simulación numérica, y el de β fue elegido para que el perfil de velocidades simplificado transportara un caudal $Q_{tot} = 42 \text{ cm}^3/\text{s}$. En la figura 4.8 se presentan los perfiles de entrada obtenidos para $y_{20} = 0.3$ e $y_{30} = 0.40898$.

Dado que la extracción en la simulación numérica se realiza en un nivel intermedio, buscamos soluciones en tres capas que aceleraran únicamente a la capa del medio, dejando pasivas a las otras dos. Al combinar esta restricción junto con la información acerca de la geometría del canal, tenemos que la curva solución debe ser tangente a la superficie (4.14) en un punto de la rama que tiene como asíntota al eje Fr_2^2 .

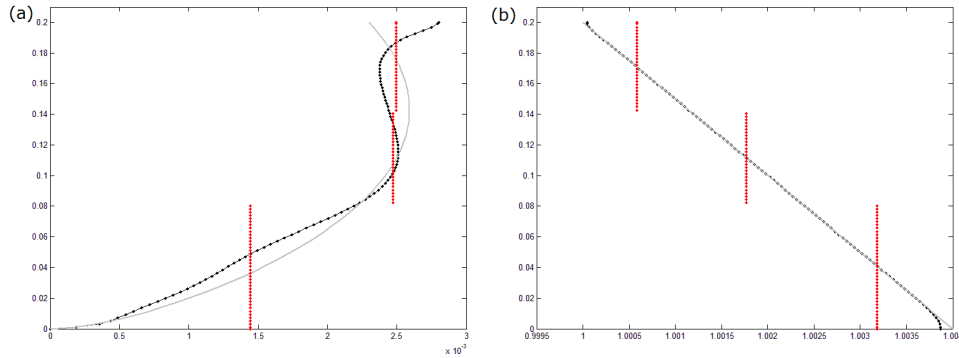


FIGURA 4.8. Perfiles de (a) velocidad horizontal y (b) densidad en la entrada del canal. En negro, se presentan los resultados de la simulación numérica; en gris, los perfiles simplificados; y en rojo, las aproximaciones para el modelo en tres capas.

Al igual que en el experimento anterior, se encontró que existe una curva de valores admisibles de (y_{20}, y_{30}) . Se seleccionaron cuatro puntos de ésta, y para ellos se compararon los flujos de cantidad de movimiento y de temperatura con los de la simulación en las mismas secciones que en el caso anterior. Los resultados obtenidos se encuentran sintetizados en la tabla 4.2. Si bien ninguna de las posibilidades analizadas es globalmente mejor que las demás, la solución con $(y_{20}, y_{30}) = (0.3, 0.40898)$ mantiene todos los errores en el orden del 5%. Los mayores errores se encuentran en el flujo de cantidad de movimiento aguas abajo de la sección de máxima contracción horizontal.

En este experimento también se observó que todas las soluciones analíticas aceleraron a la capa activa más de lo que lo hizo la solución numérica. En la figura 4.9 se muestran algunos perfiles de velocidad horizontal 10 cm aguas abajo de la sección más angosta del canal.

4.3.3. contracción₃. Se mantuvieron las mismas condiciones de caudal y estratificación del fluido que en los casos anteriores, aunque ahora se impuso una extracción tanto desde el fondo como desde el tope del canal. El perfil de velocidades de entrada simplificado considerado para este caso fue de la forma

$$u(y) = U_0 - \alpha y(1 - y),$$

donde el valor de U_0 fue tomado de los datos de la simulación numérica, y el de α fue ajustado para que el caudal de este perfil fuera el mismo que en la simulación.

Para que el modelo de tres capas se adapte a la geometría del canal y a las condiciones de descarga, es necesario que la curva solución sea tangente a la superficie (4.14) en algún punto de la rama en la que asintóticamente $Fr_1^2 \rightarrow \infty$, $Fr_2^2 \rightarrow 0$, $Fr_3^2 \rightarrow \infty$. Más aun, es necesario que esta rama sea accesible desde un estado internamente subcrítico. La única solución hallada que cumple estas condiciones es con $(y_{20}, y_{30}) = (0.78475, 0.10773)$.

Los perfiles obtenidos en este caso se presentan en la figura 4.10. Se puede observar que, cualitativamente, el modelo de tres capas se ajusta a los resultados de la simulación numérica. Al comparar los flujos de cantidad de movimiento y

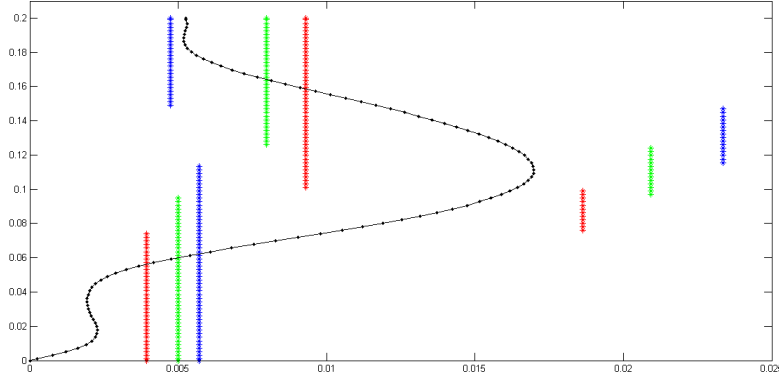


FIGURA 4.9. Perfiles de velocidad horizontal en la sección 10 *cm* aguas abajo de la más angosta del canal para *contracción*₂. Junto al obtenido numéricamente (negro), se presentan los resultados de las aproximaciones con $y_{20} = 0.24645$ (rojo), $y_{20} = 0.3$ (verde) e $y_{20} = 0.37555$ (azul).

temperatura en las secciones que se presentan en la figura, se obtiene

$$\begin{aligned} \kappa_Q^{\text{ent}} &= 0.88631, \quad \kappa_Q^{\text{up}} = 1.03580, \quad \kappa_Q^{\text{ang}} = 0.93107, \quad \kappa_Q^{\text{down}} = 0.76626; \\ \kappa_T^{\text{ent}} &= 0.92820, \quad \kappa_T^{\text{up}} = 1.00250, \quad \kappa_T^{\text{ang}} = 0.97625, \quad \kappa_T^{\text{down}} = 0.95206. \end{aligned}$$

Si bien las diferencias entre los resultados son un poco mayores que en los experimentos anteriores, el modelo en tres capas sigue ofreciendo una buena aproximación del comportamiento del flujo.

Además, en la sección 10 *cm* aguas abajo de la de máxima contracción se obtuvieron los números de Froude internos $\text{Fr}_1^2 = 2.51755$, $\text{Fr}_3^2 = 2.51856$, de modo que allí

$$\frac{\text{Fr}_3^2}{\text{Fr}_1^2} = 1.00040.$$

Teniendo en cuenta que el comportamiento asintótico de las curvas solución para $\text{Fr}_1^2 \rightarrow \infty$, $\text{Fr}_2^2 \rightarrow 0$, $\text{Fr}_3^2 \rightarrow \infty$ es

$$\frac{\text{Fr}_3^2}{\text{Fr}_1^2} \rightarrow q_{r13} \left(\frac{Y_3^*}{Y_1^*} \right)^{2/3} = 1.00034,$$

se observa que en esta sección el acomplamiento entre las dos capas es fuerte.

4.4. Experimentos para flujos sobre un obstáculo

En esta sección aproximaremos flujos de fluidos continuamente estratificados en canales de ancho constante, mediante un sistema de tres capas. Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de este sistema discreto son las presentadas en la sección 4.2.2. Los resultados analíticos obtenidos fueron contrastados con los obtenidos numéricamente con el código CAFFA3D.MB.

El canal el que se trabajó aquí es de sección rectangular y presenta una única loma, de alto máximo 4 *cm*; el fondo del canal varía suavemente (figura 4.11). Al igual que en los experimentos en canales con ancho variable, el caudal circulante

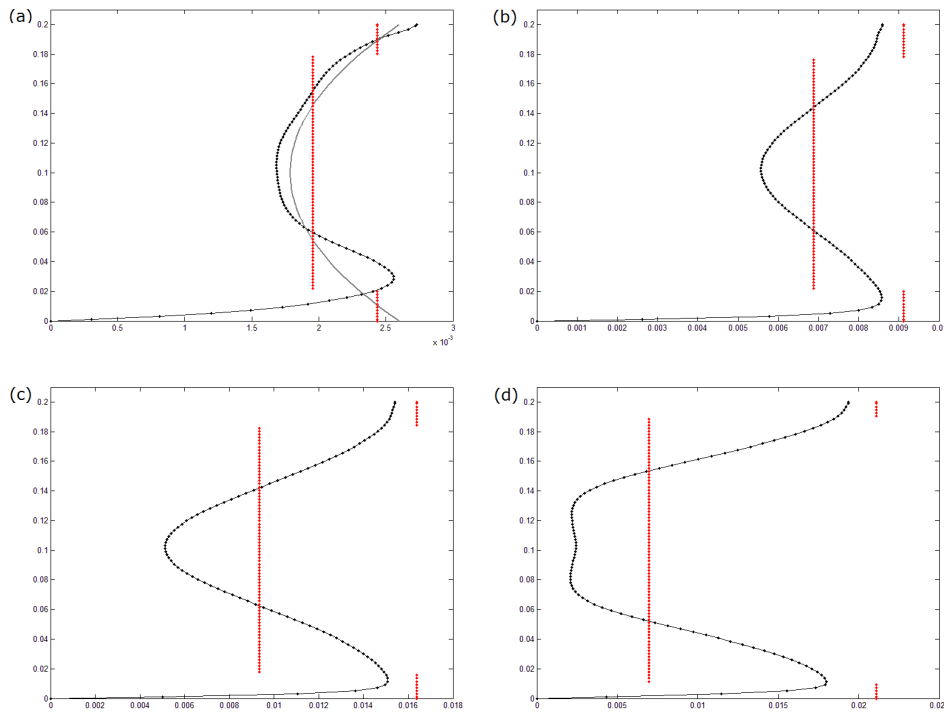


FIGURA 4.10. Perfiles de velocidad horizontal: (a) en la entrada del canal; (b) 10 *cm* aguas arriba de la sección más angosta; (c) en la sección más angosta; (d) 10 *cm* aguas abajo de la sección más angosta. En negro, se representan los perfiles obtenidos numéricamente, y en rojo los correspondientes al modelo en tres capas. En la primera figura se presenta, en gris, el perfil de velocidad simplificado.

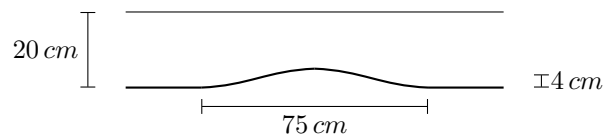


FIGURA 4.11. Vista lateral del canal con un obstáculo.

podía ser determinado por las condiciones de extracción aguas abajo en el canal. En los casos presentados aquí, se extrajo fluido únicamente desde el fondo del canal. También se impuso que el reservorio tuviese un nivel de 20 *cm*, y se manejaron caudales lo suficientemente pequeños como para suponer que el nivel total del sistema permaneciera constante a lo largo del canal.

Aquí presentamos tres experimentos realizados en este canal. En dos de estos ejemplos se trabajó con reservorios con estratificación lineal, mientras que en el tercero la densidad variaba exponencialmente con la altura (tabla 4.3). La elección de una estratificación exponencial responde a que este tipo de perfiles son los utilizados para modelar condiciones de heladas de radiación. Debido a la similitud entre

EXPERIMENTO	ESTRATIFICACIÓN	CAUDAL	EXTRACCIÓN
obstáculo ₁	lineal	50 cm ³ /s	fondo
obstáculo ₂	lineal	100 cm ³ /s	fondo
obstáculo ₃	exponencial	50 cm ³ /s	fondo

CUADRO 4.3. Datos de las simulaciones realizadas en el canal con un obstáculo.

los resultados obtenidos, los presentaremos a todos en conjunto. El método para obtener soluciones en tres capas para flujos sobre obstáculos es el mismo que el correspondiente a flujos a través de contracciones. Una vez aproximados los perfiles de velocidades horizontales en la entrada del canal, se realizaron perfiles simplificados y se los utilizó de igual modo que en la sección anterior. Como la estratificación está siendo supuesta conocida, se logra tener formulado el problema en función de (y_{20}, y_{30}) .

Luego, fue impuesta la restricción dada por la geometría del canal, obligando a las curvas solución a ser tangentes a la superficie (4.10) en un punto de una rama que acelere a la capa inferior, y que ésta sea accesible desde un estado subcrítico. De los comportamientos asintóticos presentados en la sección 4.2.2, el primero no corresponde a este caso, ya que no es posible acelerar las tres capas en un canal como el de la figura 4.11 sin violar la hipótesis de tapa rígida. Tampoco se encontraron soluciones que tuvieran un comportamiento asintótico como el segundo presentado en dicha sección. Así, es necesario que se cumpla la restricción

$$(4.15) \quad Q_1^{*-2/3} Y_1^* \geq \frac{3}{2},$$

y la rama que conecta un estado subcrítico aguas arriba en el canal y acelera a la capa inferior tiene como comportamiento asintótico

$$(\text{Fr}_1^2, \text{Fr}_2^2, \text{Fr}_3^2) \rightarrow (\alpha, 0, \infty),$$

donde $\alpha < 1$. En la figura 4.12 se presentan los valores admisibles de (y_{20}, y_{30}) para el experimento **obstáculo₁**. La forma de estas curvas fue similar en los tres casos analizados: los valores de y_{30} permanecen prácticamente constantes, e y_{20} varía entre 0 y el valor dado por (4.15).

En la tabla 4.4 se sintetizan los resultados obtenidos para $y_{20} \in \{0.1, 0.3, 0.6\}$. Estos son de peor calidad que los correspondientes a flujos a través de contracciones. En los dos primeros experimentos, encontramos que los tres modelos presentan resultados similares entre sí. Particularmente, en la cima del obstáculo se tienen las mayores diferencias con la solución numérica. Para el flujo de cantidad de movimiento, los errores llegan a ser del orden del 45 %, mientras que para el flujo de temperaturas, llegan hasta un 25 %.

En cambio, para el experimento **obstáculo₃**, se encontraron errores de mayor orden. Los valores de κ_Q en la sección de entrada del canal indican que aquí la elección más conveniente de parámetros de las tres que se muestran es $y_{20} = 0.3$, $y_{30} = 0.23795$. Sin embargo, los errores cometidos con esta aproximación en la cima del obstáculo y a la salida del canal son comparables con los de los modelos que reproducen más pobremente las condiciones en la entrada.

Por otra parte, en estos experimentos se observó más fuertemente el fenómeno de que el modelo con estratificación discreta predijera una aceleración de la capa

EXPERIMENTO	CASO	SECCIÓN					
		Entrada del canal		Cima del obstáculo		Salida del canal	
		κ_Q	κ_T	κ_Q	κ_T	κ_Q	κ_T
obstáculo ₁	$y_{2o} = 0.1, y_{3o} = 0.25441$	0.92341	0.95223	0.54756	0.80144	1.33440	1.10430
	$y_{2o} = 0.3, y_{3o} = 0.24449$	0.92198	0.95390	0.55365	0.80284	1.37520	1.10630
	$y_{2o} = 0.6, y_{3o} = 0.23706$	0.91499	0.94512	0.56042	0.79545	1.44590	1.09610
obstáculo ₂	$y_{2o} = 0.1, y_{3o} = 0.31219$	0.85558	0.92020	0.53603	0.75348	1.24740	1.05050
	$y_{2o} = 0.3, y_{3o} = 0.29117$	0.86222	0.92539	0.54037	0.75773	1.24650	1.05650
	$y_{2o} = 0.6, y_{3o} = 0.27495$	0.85415	0.91937	0.54223	0.75280	1.25860	1.04960
obstáculo ₃	$y_{2o} = 0.1, y_{3o} = 0.24416$	0.59669	1.01670	0.37144	0.81032	1.27620	1.01220
	$y_{2o} = 0.3, y_{3o} = 0.23795$	0.80222	0.99773	0.48330	0.79517	1.39190	0.99326
	$y_{2o} = 0.6, y_{3o} = 0.23800$	0.66998	1.06900	0.42513	0.85198	1.49420	1.06420

CUADRO 4.4. Comparación de los flujos de cantidad de movimiento y de temperatura entre las soluciones en tres capas y la obtenida numéricamente para los tres experimentos en el canal con un obstáculo en el fondo. En negrita, se marca el valor que presenta el menor error en cada sección.

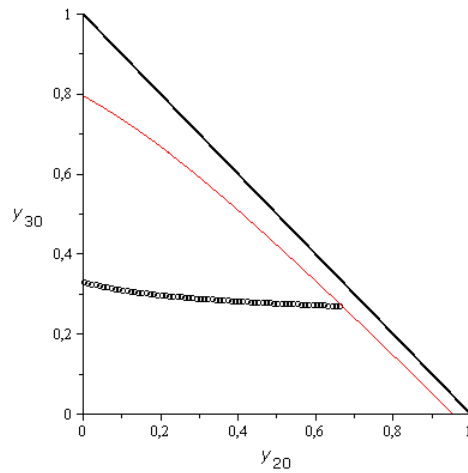


FIGURA 4.12. Valores admisibles de (y_{20}, y_{30}) para que la aproximación por tres capas represente la geometría y las condiciones de descarga del experimento *obstáculo₁*. En rojo, se representa la curva dada por la igualdad en (4.15).

activa mayor que la obtenida numéricamente (figura 4.13). El requerimiento de que la capa inferior aumente su número de Froude interno hizo que tuviera que disminuir su tirante para aumentar su velocidad. Como en todos los casos el caudal de esta capa permanecía relativamente fijo (ya que los valores de y_{30} lo hacían), la velocidad y espesor del estrato inferior en la salida es similar en todos los casos de cada experimento. Por causa de esto, los flujos de cantidad de movimiento de las soluciones en tres capas pasan de subestimar a los obtenidos por la solución numérica en la cima del obstáculo en un 45 % a sobreestimarlos en la salida en un 25 a 40 %.

4.5. Conclusiones

Los modelos con estratificación discreta ofrecen un marco simple para analizar cualitativamente y una buena aproximación cuantitativa del comportamiento de flujos de fluidos continuamente estratificados en canales de ancho variable. A pesar de que las estratificaciones con las que se trabajó aquí no ofrecen las ventajas que presentaban las estudiadas por Farmer y Denton [23], Smeed [45] o Armi y Farmer [4], en las que existen cuerpos de agua de densidades distintas claramente identificables, la aproximación por tres capas permitió estimar qué estratos se desplazan con mayor velocidad.

En aquellos problemas en que la porción de fluido acelerada se hizo corresponder con una única capa en el modelo discreto, la información sobre la geometría del canal no fue suficiente para determinar de forma única la solución. Cualitativamente, las soluciones obtenidas ofrecen resultados similares a los de la simulación, y para las magnitudes analizadas los errores fueron del orden del 5 % (flujo de cantidad de movimiento) y del 10 % (flujo de temperatura). Asimismo, en estos casos es posible suponer que sólo existen dos capas, una activa y una pasiva, simplificando más aún

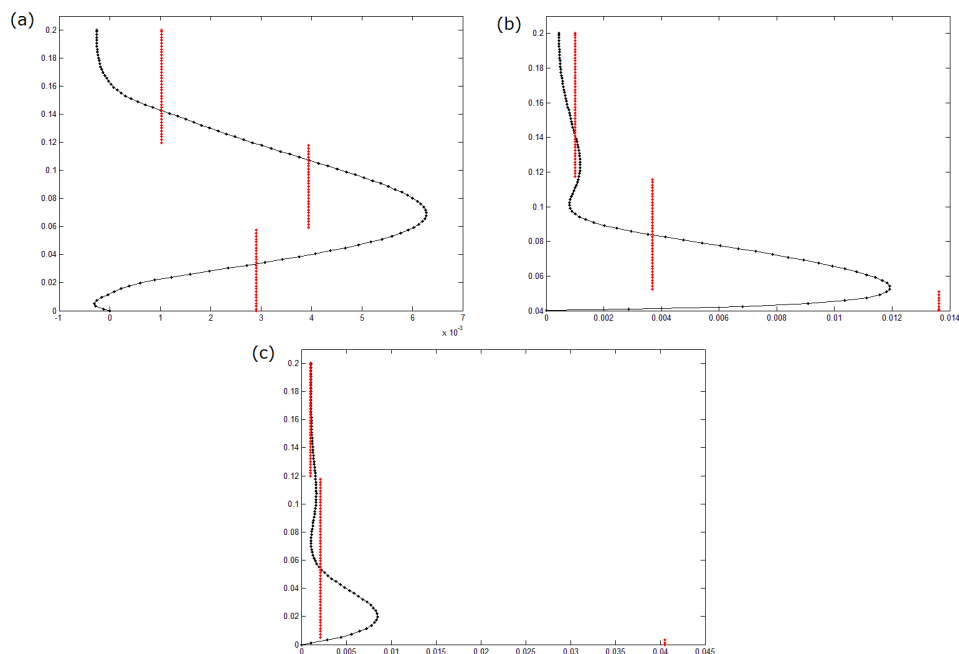


FIGURA 4.13. Perfiles de velocidad horizontal para el experimento obst\u00e1culo_3 : (a) en la entrada del canal; (b) en la cima de la loma; (c) a la salida del canal. En negro, los perfiles obtenidos con CAFFA3D.MB. En rojo, los de la aproximaci\u00f3n por tres capas con $y_{20} = 0.3$ e $y_{30} = 0.23795$.

el modelo. Los resultados obtenidos de este modo son del mismo orden que para tres capas.

En cambio, si el flujo requiere que la soluci\u00f3n con estratificaci\u00f3n discreta presente dos capas activas, se encontr\u00f3 un \u00fanico modelo posible que respetara la geometr\u00eda del canal. Aqu\u00ed no ser\u00eda posible realizar mayores simplificaciones sobre el sistema de tres capas, aunque las consideraciones realizadas acerca de la relaci\u00f3n entre los n\u00fameros de Froude de las capas activas permiten vincular estos dos par\u00e1metros. Se tiene un acoplamiento entre las capas inferior y superior.

Los valores de velocidades que se obtienen para la estratificaci\u00f3n discreta en las capas activas es un poco mayor a lo esperado. Esto puede ser atribuido al rozamiento, tanto con el fondo del canal (para la capa inferior) como con las regiones con menor velocidad del propio fluido. Como entre las hip\u00f3tesis para el modelo discreto se encuentra que los fluidos en cuesti\u00f3n sean no viscosos, se descarta la posibilidad de que la soluci\u00f3n anal\u00edtica presente una cierta porci\u00f3n del fluido desacelerada por esfuerzos tangenciales.

Por otra parte, para flujos sobre obst\u00e1culos en el fondo del canal, los resultados no son de igual calidad. La loma act\u00faa sobre el fluido en la simulaci\u00f3n num\u00e9rica de forma distinta de la que lo hace en las soluciones en tres capas. En el primer caso, el estrato que se extrae se encuentra a una altura intermedia en la entrada del canal, y se tiene una porci\u00f3n de fluido en reposo aguas arriba del obst\u00e1culo (figura 4.14). En el modelo de tres capas, las curvas soluci\u00f3n ofrecen menos posibilidades que para

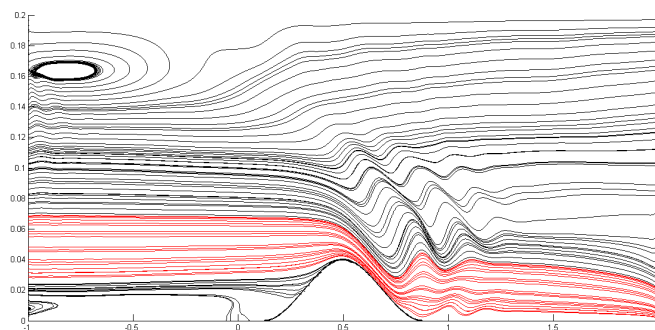


FIGURA 4.14. Líneas de flujo obtenidas con el código CAF-FA3D.MB para el experimento *obstáculo₃*. En rojo, se marca la porción de fluido que está siendo succionada.

flujos a través de contracciones, forzando a que la extracción sea de la capa inferior. Además, esta capa es acelerada bruscamente debido a la falta de rozamiento con el fondo del canal. La combinación de estos factores repercute negativamente sobre los resultados obtenidos en los experimentos realizados.

Otro factor de discrepancia entre los resultados analíticos y los numéricos en la presencia de resaltos hidráulicos internos, por dos razones distintas. En primer lugar, porque en los resaltos se tiene una transferencia de momento entre capas, con pérdida de energía interna (figuras 4.14 y 4.15 (a)).

En segundo lugar, porque en ellos puede ocurrir mezcla, y el perfil de densidades aproximado, que se toma aguas arriba del resalto, puede perder exactitud aguas abajo del mismo (figura 4.15 (b) y (c)). La primera dificultad podría ser tratada en los modelos con estratificación discreta si tuviésemos una estimación del nivel en el que ocurre el salto y de la energía disipada en el mismo, en forma similar a la tratada en la sección 3.5.1. Las dificultades generadas por la mezcla en el fluido requerirían que el modelo incorporase parámetros como densidades de energía para las interfases, y obtener cotas como las presentadas en la sección 3.5.2.

Finalmente, en todos los casos aquí explorados, los modelos discretos presentaron un único control hidráulico, en la sección de mayor constricción del canal (la más angosta o la cima del obstáculo). Así se logró el pasaje de un estado internamente subcrítico en el reservorio a uno supercrítico.

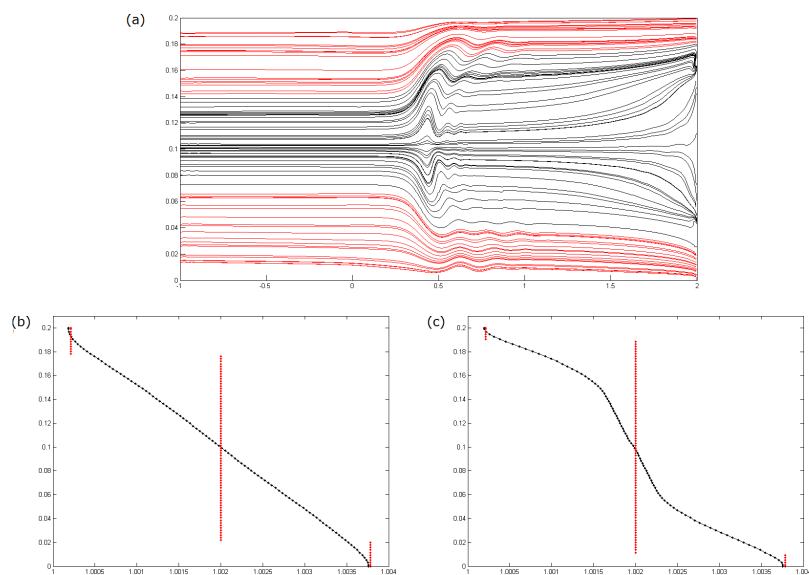


FIGURA 4.15. Arriba, (a) líneas de flujo para el experimento contracción_3 . En rojo, se marcan las porciones de fluido que están siendo extraídas. La sección más angosta del canal se encuentra en $x = 0.36$. Abajo, perfiles de densidades, (b) 10 *cm* aguas arriba y (c) 10 *cm* aguas abajo de la sección más angosta. En rojo, se presentan los perfiles calculados por el modelo de tres capas.

Bibliografía

- [1] Abgrall, R., Karni, S., *Two-layer shallow water system: a relaxation approach*. SIAM J. Sci. Comput., **31** (3), (2009), 1603-1627.
- [2] Armi, L., *The hydraulics of two flowing layers with different densities*. J. Fluid Mech., **163**, (1986), 27-60.
- [3] Armi, L., Farmer, D. M., *Maximal two-layer exchange through a contraction with barotropic net flow*. J. Fluid Mech., **164**, (1986), 27-52.
- [4] Armi, L., Farmer, D. M., *Stratified flow over topography: bifurcation fronts and transition to the uncontrolled state*. Proc. R. Soc. Lond. A, (2002), **458**, 513-538.
- [5] Armi, L., Williams, R., *The hydraulics of a stratified fluid flowing through a contraction*. J. Fluid Mech., **251**, (1993), 355-375.
- [6] Baines, P. G., *A general method for determining upstream effects in stratified flow of finite depth over long two-dimensional obstacles*. J. Fluid Mech. **188**, (1988), 1-22.
- [7] Baines, P. G., *A unified description of two-layer flow over topography*. J. Fluid Mech. **146**, (1984), 127-167.
- [8] Baines, P. G., *Topographic effects in stratified flows*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [9] Baines, P. G., *Upstream blocking and airflow over mountains*. Ann. Rev. Fluid Mech., **19**, (1987), 75-97.
- [10] Baines, P. G., Davies, P. A., *Laboratory studies in topographic effects in rotating and/or stratified fluids*. Orographic effects in Planetary Flows, GARP Pub. No. 23, World Met. Org., (1980), 233-299.
- [11] Barros, R., Choi, W. *On the hyperbolicity of two-layer flows*. En Proceedings of the 2008 Conference on FACM'08. New Jersey Institute of Technology, USA, 19-21 May 2008.
- [12] Benjamin, T., B., *Steady flows drawn from a stably stratified reservoir*. J. Fluid Mech., **106**, (1980), 245-260.
- [13] Benton, G., *A general solution for the celerity of long gravitational waves in a stratified fluid*. Tech. Rep. No. 5. The Johns Hopkins Univ., Baltimore, 1954.
- [14] Benton, G., *The occurrence of critical flow and hydraulic jumps in a multi-layered fluid system*. J. Met., **11**, (1954), 139-150.
- [15] Binnie, A., *The passage of a perfect liquid through a critical cross-section or 'throat'*. Proc. Roy. Soc. A, **197**(1949), 545-555.
- [16] Cabeza, C., Varela, J., Bove, I., Freire, D., Martí, A. C., Sarasúa, L. G., Usera, G., Montagne R., Araujo, M., *Two-layer stratified flows over pronounced obstacles at low-to-intermediate Froude numbers*. Phys. Fluids, **21**, (2009), 044102 .
- [17] Dalziel, S., *Two-layer hydraulics: a functional approach*. J. Fluid Mech., **223**, (1991), 135-163.
- [18] Dalziel, S., Lane-Serff, G., *The hydraulics of doorway exchange flows*. Building and Environment, **26** (2), (1991), 121-135.
- [19] Denton, R., *Energy curves for multi-layer flow through obstructions*. J. Hydraulic Res., **27**, (1989), 617-635.
- [20] Denton, R., *Locating and identifying hydraulic controls for layered flow through an obstruction*. J. Hydraulic Res., **25**, (1987), 281-299.
- [21] Drazin, P.G., Reid, W.H., *Hydrodynamic stability*. Cambridge Univ. Press, US, 1981.
- [22] Farmer, D. M., Armi, L., *Maximal two-layer exchange over a sill and through the combination of a sill and contraction with barotropic net flow*. J. Fluid Mech., **164**, (1986), 53-76.
- [23] Farmer, D., Denton, R., *Hydraulic control of flow over the sill in Observatory Inlet*. J. Geophys. Res., **90** (C5), (1985), 9051-9068.
- [24] Folland, G., B., *Real analysis*. John Wiley & Sons. Inc., New York, 1999.

- [25] Gill, A., E., *The hydraulics of rotating channel flow*. J. Fluid Mech., **80**, (1977), 641-671.
- [26] Hazel, P., *Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows*. J. Fluid Mech., **51** (1), (1972), 39-61.
- [27] Holland, D., Rosales, R., Stefanica, D., Tabak, E., *Internal hydraulic jumps and mixing in two-layer flows*. J. Fluid Mech., **470**, (2002), 63-83.
- [28] Huerre, P., Rossi, M., *Hydrodynamics instabilities in open flows*. En Godrèche, C., Manneville P., *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*, Cambridge Univ. Press, New York, 1998.
- [29] Huppert, H. E., *Topographic effects in stratified fluids*. En Freeland, H., Farmer, D., Levings, C., *Fjord Oceanography*, Plenum Press, New York, 1980.
- [30] Killworth, P., *On hydraulic control in a stratified fluid*. J. Fluid Mech., **237**, (1992), 605-626.
- [31] Kundu, P., Cohen, I., *Fluid Mechanics*. Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.
- [32] Lane-Serff, G., Smeed, D., Postlethwaite, C., *Multi-layer hydraulic exchange flows*. J. Fluid Mech., **416**, (2000), 269-296.
- [33] Lawrence, G., *On the hydraulics of Boussinesq and non-Boussinesq flows*. J. Fluid Mech., **215**, (1990), 457-480.
- [34] Lawrence, G., *Steady flow over an obstacle*. J. Hyd. Engineering, **113**, (1987), 981-991.
- [35] Lawrence, G., *The hydraulics of steady two-layer flow over a fixed obstacle*. J. Fluid Mech., **254**, (1993), 605-633.
- [36] Long, R., *Long waves in a two-fluid system*. J. Met., **13**, (1956), 70-74.
- [37] Long, R., *Some aspects of the flow of stratified fluids. I. A theoretical investigation*. Tellus, **5**, (1953), 42-57.
- [38] Long, R., *Some aspects of the flow of stratified fluids. II. Experiments with a two-fluid system*. Tellus, **6**, (1954), 97-115.
- [39] Long, R., *Some aspects of the flow of stratified fluids. III. Continuous density gradients*. Tellus, **7**, (1955), 341-357.
- [40] Majda, A., Bertozzi, A., *Vorticity and the incompressible flow*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [41] Maslowe, S. A., *Shear flows instabilities and transition*. En Swinney, H., Gollub, J., *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Berlin, Springer-Verlag, 1985.
- [42] Miles, J., W., *On the stability of heterogeneous shear flows. Part 2*. J. Fluid Mech., **16**, (1963), 209-227.
- [43] Negretti, M. E., *Hydrodynamic instabilities and entrainment in two-layer stratified flows down a slope*. Ph. D. thesis, Universistät Karlsruhe, 2007.
- [44] Schijf, J. B., Schönfeld, J. C., *Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water*. In Proc. Of the Minn. Int. Hydraulics Conv., Joint meeting IAHR and Hyd. Div. ASCE., Sept. 1953, 321-333.
- [45] Smeed, D., *Hydraulic Control of Three-Layer Exchange Flows: Application to the Bab al Mandab*. Journ. Phys. Oceanography, **30**, (2000), 2574-2588.
- [46] Smith, R. B., *On severe downslope winds*. J. Atmos. Sci., **42**, (1985), 2597-2603.
- [47] Squire, H., B., *On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls*. Proc. Roy. Soc. London Ser. **A 142**, 621-628.
- [48] Su, C. H., *Hydraulic jumps in an incompressible stratified fluid*. J. Fluid Mech., **73** (1), (1976), 33-47.
- [49] Turner, J. S., *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.
- [50] Usera, G., IMFIA, Facultad de Ingeniería, J. H. y Reissig 565., Montevideo, Uruguay. Código disponible en www.fing.edu.uy/imfia/caffa3d.MB.
- [51] Varela, J., Araújo, M., Bove, I., Cabeza, C., Usera, G., Martí, A. C., Montagne, R., Sarasúa, L. G., *Instabilities developed in stratified flows over pronounced obstacles*. Physica A, **386**, (2007), 681-685.
- [52] Wood, I. R., *Selective withdrawal from a stably stratified fluid*. J. Fluid Mech., **32**, (1968), 209-223.
- [53] Wood, I. R., Simpson, J. E., *Jumps in layered miscible fluids*. J. Fluid Mech., **140**, (1984), 329-342.
- [54] Yih, C. S., Guha., C. R., *Hydraulic jump in a fluid system of two layers*. Tellus, **7**, (1955), 358-366.